13. týden:

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

Připomenutí:

Délka křivky

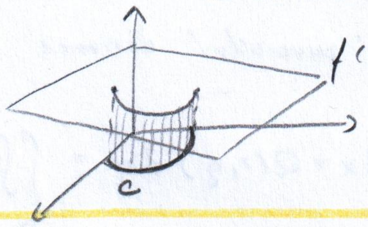
a) křivka je zadána rcí $y = f(x)$, $x \in [a,b]$: $L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

b) křivka je zadána parametricky $x = x(t)$, $y = y(t)$ $t \in [a,b]$: $L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

Křivkový integrál I. druhu:

V $\mathbb{R}^2$: $$\boxed{\int_C f(x,y)\,ds := \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt}$$

KDE $C: x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a,b]$ → obsah obrazce ohraničený grafem f a křivkou C



analogicky V $\mathbb{R}^3$: $$\boxed{\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt}$$

$C: x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a,b]$

NEZÁVISÍ NA ORIENTACI C

ZÁVISÍ NA ORIENTACI C

Křivkový integrál II. druhu:

$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = P(x,y)\cdot\vec{i} + Q(x,y)\cdot\vec{j}$ (jedn. vektor ve směru osy x)

... vektorové pole v $\mathbb{R}^2$

$C: x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a,b]$ hladká křivka taková, že $\varphi'(t) + \psi'(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$

(Tečný vektor k C v bodě $[\varphi(t), \psi(t)]$ je $[\varphi'(t), \psi'(t)]$)

$$\int_C \vec{F}(x,y)\,d\vec{s} \overset{\text{kladná or.}}{\underset{\text{zápor. orientace}}{=}} \pm \int_a^b [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\,dt =$$

$$= \int_C [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy]$$

orientovaná křivka

Nezávislost křivkového integrálu II druhu na integrační cestě:

Jestliže $P_y = Q_x$, přitom P_y, Q_x jsou spojité na jednotaše souvislé oblasti G

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = F(B) - F(A)$$

tj. tehdy, když $P\,dx + Q\,dy$ je totálním diferenciálem nějaké funkce

F... kmenová fce výrazu $P\,dx + Q\,dy$

A... počáteční bod C

B... koncový bod C

$\Rightarrow$ Je-li C uzavřená $\oint_C \ldots = 0$.

Greenova věta (převádí křivkový integrál přes uz. křivku na dvojný)

Nechť C je hladká uzavřená jednoduchá křivka orientovaná kladně. Nechť D je oblast v rovině ohraničená křivkou C. Nechť $P, Q : D \to \mathbb{R}$ jsou spojité na D a mají zde spojité parciální derivace P_y, Q_x. Pak

$$\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dx\,dy$$

Věty:

① $\int_C P\,dx + Q\,dy$ nezávisí na integrační cestě $\Leftrightarrow$ $\oint_{\tilde{C}} P\,dx + Q\,dy = 0$ $\forall \tilde{C}$ uzavř.

② Je-li $\vec{F}$ konzervativní (potenciálové) (silové) pole ($\Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = 0$), pak hodnota křivkového integrálu nezávisí na integrační cestě.

(resp. $\Leftrightarrow$)

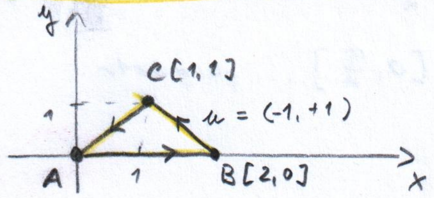
pro takové pole má smysl zavádět potenciál

Více viz předmět „Molekulová fyzika a termika".

PŘÍKLADY

① Vypočtěte křivkový integrál (I. DRUH)

$$\int_c (x+y)\,ds\,, \quad c = \triangle ABC \qquad A[0,0],\ B[2,0],\ C[1,1]$$



AB: $\begin{aligned} x &= t \\ y &= 0 \end{aligned} \quad t \in [0,2] \Rightarrow \begin{aligned} x' &= 1 \\ y' &= 0 \end{aligned}$

BC: $\begin{aligned} x &= 2 - t \\ y &= 0 + t \end{aligned} \quad t \in [0,1] \Rightarrow \begin{aligned} x' &= -1 \\ y' &= 1 \end{aligned}$

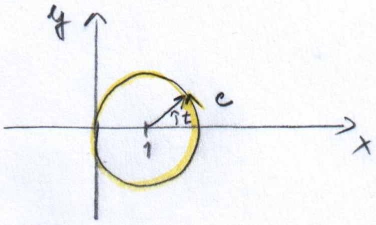
CA: $\begin{aligned} x &= t \\ y &= t \end{aligned} \quad t \in [0,1] \Rightarrow \begin{aligned} x' &= 1 \\ y' &= 1 \end{aligned}$

$$\int_c (x+y)\,ds = \int_{c_1} (x+y)\,ds + \int_{c_2} (x+y)\,ds + \int_{c_3} (x+y)\,ds = \int_0^2 (t+0)\cdot 1\,dt + \int_0^1 (2-t+t)\sqrt{2}\,dt$$

$$+ \int_0^1 (t+t)\sqrt{2}\,dt =$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 + \left[2t\right]_0^1 \sqrt{2} + \left[t^2\sqrt{2}\right]_0^1 = \underline{\underline{3\sqrt{2} + 2}}$$

② $\int_c \sqrt{x^2+y^2}\,ds \qquad c:\ x^2+y^2 = 2x$



$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$c:\ \begin{aligned} x &= \cos t + 1 \\ y &= \sin t \end{aligned} \qquad t \in [0, 2\pi]$

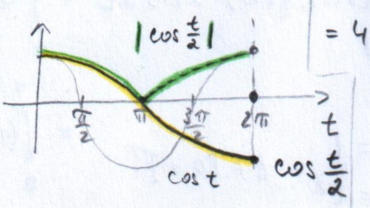
$\Rightarrow \begin{aligned} x' &= -\sin t \\ y' &= \cos t \end{aligned}$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos t + 1)^2 + \sin^2 t} \cdot \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2\cdot\cos t + 2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos t}\,dt = \sqrt{2}\cdot\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\cdot\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt = 2\cdot\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt =$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{t}{2} = \frac{1+\cos t}{2} \Rightarrow 1 + \cos t = 2\cdot\cos^2\frac{t}{2}$$



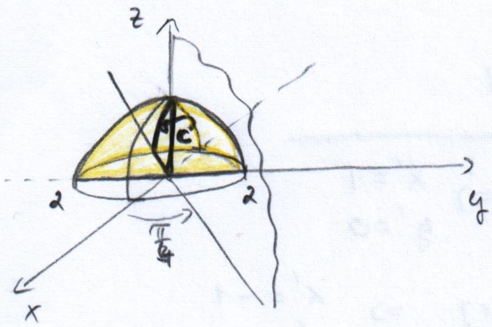
$$= 4\cdot\int_0^{\pi} \cos\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 4\cdot\left[\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi} =$$

$$= 8\cdot\left[\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} =$$

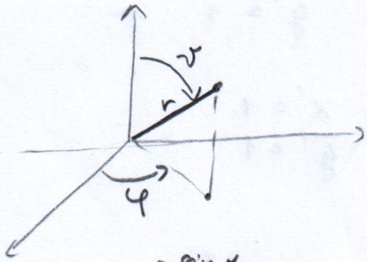
$$= 8\cdot(1-0) = \underline{\underline{8}}$$

③ $\int_C \sqrt{2y^2+z^2}\,ds \qquad C = \{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=4,\ x=y,\ x\le 0,\ z\ge 0\}$



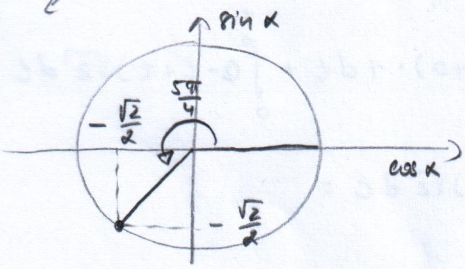
$$x = r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\vartheta \qquad \varphi = \frac{5\pi}{4}$$
$$y = r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\vartheta \qquad r = 2$$
$$z = r\cdot\cos\vartheta \qquad \vartheta\in[0,\tfrac{\pi}{2}] \text{ ... parametr}$$

$\downarrow$



$$x = 2\cdot\cos\frac{5\pi}{4}\cdot\sin t \qquad t\in[0,\tfrac{\pi}{2}]$$
$$y = 2\cdot\sin\frac{5\pi}{4}\cdot\sin t$$
$$z = 2\cdot\cos t$$

$\downarrow$



$$x = -\sqrt{2}\cdot\sin t \qquad x' = -\sqrt{2}\cos t$$
$$y = -\sqrt{2}\sin t \qquad t\in[0,\tfrac{\pi}{2}] \qquad y' = -\sqrt{2}\cos t$$
$$z = 2\cdot\cos t \qquad z' = -2\sin t$$

$$\int_C \sqrt{2y^2+z^2}\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cdot(-\sqrt{2}\sin t)^2+(2\cdot\cos t)^2}\cdot\sqrt{(-\sqrt{2}\cos t)^2+(-\sqrt{2}\cos t)^2+(-2\sin t)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t}\cdot\sqrt{4\cos^2 t+4\sin^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}\,dt =$$

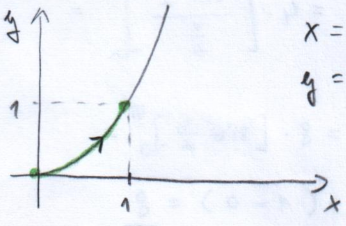
$$= 4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 4\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{2\pi}}$$

(II. DRUH)

④ $\int_C \vec{F}(x,y)\,d\vec{s}\ ; \quad \vec{F}(x,y) = (1+y^2,\ 3x) \quad C$: část paraboly $y=x^2$ spojující body $[0,0]$ a $[1,1]$

$$\int_C \vec{F}(x,y)\,ds = \int_0^1 P(x(t),y(t))\cdot x'(t)\,dt + \int_0^1 Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt =$$

$$= \int_C P\,dx + \int_C Q\,dy =$$



$$x = t \qquad t\in[0,1]$$
$$y = t^2$$

$$= \int_0^1 (1+t^4)\cdot 1\,dt + \int_0^1 3t\cdot 2t\,dt = \underline{\underline{\frac{16}{5}}}$$

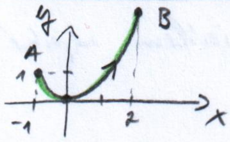
(5) $\int_C (2xy+1)\,dx + (x^2+1)\,dy$ $\quad A[-1, 1]$ počáteční bod křivky C; $B[2, 4]$ koncový bod

je-li C:

a) PARABOLA procházející počátkem

b) lomená čára mající zlom v bodě $C[0, 1]$

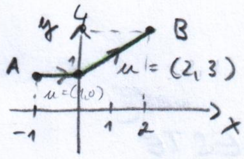
---

a) 

$$\begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 \\ \hline x' = t,\ y' = 2t \end{array} \qquad t \in [-1, 2] \quad \text{SOUHLASNÁ ORIENTACE}$$

$$I = \int_{-1}^{2} (2t^3+1)\,t\,dt + \int_{-1}^{2} (t^2+1)\,2t\,dt = \dots = \underline{\underline{21}}$$

$$u = [2,4] - [0,1] = (2,3)$$

b) 

$$\begin{array}{l} x = t+1 \\ y = 1 \\ \hline x' = 1 \\ y' = 0 \end{array} \quad t \in [-1, 0] \text{ SOUHLAS} \qquad \begin{array}{l} x = 2t + 0 \\ y = 3t+1 \\ \hline x' = 2 \\ y' = 3 \end{array} \quad t \in [0, 1]$$

$$I = \int_{-1}^{0} (2t+1)\,dt + \int_0^1 \underbrace{(2\cdot 2t\cdot(3t+1)+1)}_{24t + 8t + 2}\cdot 2\,dt + \int_0^1 \underbrace{(4t^2+1)\cdot 3}_{12t^2+3}\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{0} (2t+1)\,dt + \int_0^1 (36t^2 + 8t + 5)\,dt = \left[t^2 + t\right]_{-1}^{0} + \left[12t^3 + 8\cdot\frac{t^2}{2} + 5t\right]_0^1 =$$

$$= 0 + 12 + 4 + 5 = \underline{\underline{21}}$$

(6) Rozhodněte, zda předchozí integrál závisí na integrační cestě a pokud ne, určete jeho hodnotu pomocí kmenové funkce.

Ověříme, zda je výraz $(2xy+1)\,dx + (x^2+1)\,dy$ totálním diferenciálem nějaké funkce F. Pokud ano, platí $I = F(B) - F(A)$.

(I) Jde o totální diferenciál? $P\,dx + Q\,dy = F_x\,dx + F_y\,dy$

$$P_y \stackrel{?}{=} Q_x \qquad \left.\begin{array}{l} P_y = 2x \\ Q_x = 2x \end{array}\right\} \text{ANO}$$

(II) Hledání kmenové fce:

$$F_x = 2xy + 1 \Rightarrow F = \int (2xy+1)\,dx = x^2 y + x + c(y)$$

$$F_y = x^2 + 1 \Rightarrow \quad x^2 + 1 = x^2 + 0 + c'(y) \qquad \frac{d}{dy}$$

$$c'(y) = 1$$

$$c(y) = y + c$$

$$\boxed{F = x^2 y + x + y + c}$$

(III) $F(B) - F(A) = F(2,4) - F(-1,1) = 2^2\cdot 4 + 2 + 4 + c - ((-1)^2\cdot 1 - 1 + 1 + c) = \underline{21}$

Rozhodněte, zda integrál závisí na integrační cestě a spočtěte:

(7) $\int_C x\,dx + y\,dy + z\,dz$ $\quad C: \; x = \cos t, \; y = \sin t, \; z = t, \quad t \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow \; C: \; [1,0,0] \to [1,0,2\pi]$

(I) Ověříme, zda funkce $x\,dx + y\,dy + z\,dz$ je totálním diferenciálem nějaké fce:

$P\,dx + Q\,dy + R\,dz \overset{?}{=} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.$

Tj. ověříme, zda:

$$P_y \overset{?}{=} Q_x \to 0 = 0 \checkmark$$

$$\binom{3}{2} \quad P_z \overset{?}{=} R_x \to 0 = 0 \checkmark$$

ANO, jde o totální diferenciál.

$$Q_z \overset{?}{=} R_y \to 0 = 0 \checkmark$$

$\Rightarrow$ NEZÁVISÍ NA INTEGRAČNÍ CESTĚ

(II) Výpočet přes C:

$$dx = -\sin t\,dt, \quad dy = +\cos t\,dt, \quad dz = dt$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + \sin t \cos t + t)\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{2\pi^2}}$$

Obsah elipsy bez křivkového integrálu

VIZ Kalas: Př 4.3 str 199 $\to$

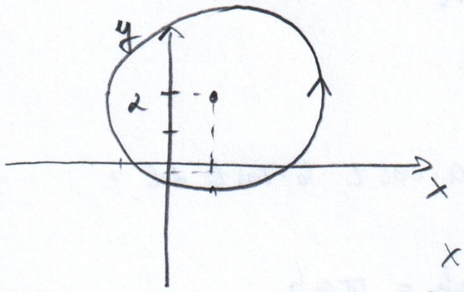
(8) $\int_C (x-y)\,dx - 2y\,dy$ $\qquad C: \; x^2+y^2 \le 2x+4y$

$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_G (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \iint_G (0-(-1))\,dx\,dy = \iint_G 1\,dx\,dy = \pi r^2 = \underline{\underline{5\pi}}$

obsah plochy ohraničené křivkou C

$P_y = -1$

$Q_x = 0$



$x^2+y^2 = 2x+4y$

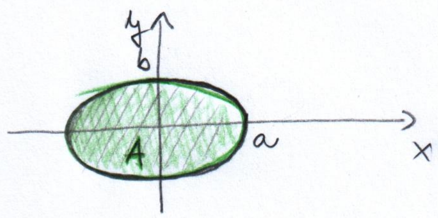
$x^2-2x+y^2-4y = 0$

$(x-1)^2+(y-2)^2 = 1+4$

$(x-1)^2+(y-2)^2 = 5 \qquad r = \sqrt{5} \doteq 2{,}2$

(9) Pomocí křivkového integrálu spočtěte obsah plochy (oblasti) ohraničené křivkou c (určete míru množiny $A = \operatorname{Int} c$), je-li c hladká, jednoduchá, uzavřená křivka orientovaná kladně, třeba elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Greenova věta:

$$\iint_A (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

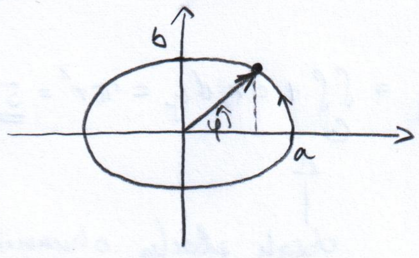
Míra množiny A $\quad m(A) = \iint_A 1\,dx\,dy$

OBVYKLE VOLÍME $\quad Q_x - P_y = 2 \quad$ jako $1-(-1)$, to znamená

$$\left.\begin{aligned} Q &= x \\ P &= -y \end{aligned}\right\} \quad m(A) = \frac{1}{2}\iint_A (1-(-1))\,dx\,dy \underset{\text{G.V.}}{=} \frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m(A) = \frac{1}{2}\oint_C (-y)\,dx + x\,dy}$$

$$m(A) = \frac{1}{2} \oint_C (-y)\,dx + x\,dy$$



$x = a \cdot \cos t$

$y = b \cdot \sin t$

$t \in [0, 2\pi]$ $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \checkmark}$

$dx = -a \cdot \sin t$

$dy = b \cdot \cos t$

$$m(A) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -b \cdot \sin t\,(-a \cdot \sin t)\,dt + a \cdot \cos t \cdot b \cdot \cos t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \frac{2\pi}{2} ab = \underline{\underline{\pi ab}}$$

PLOŠNÝ INTEGRÁL