MV011 Statistika I

4. Náhodné vektory

Jan Koláček (kolacek@math.muni.cz)

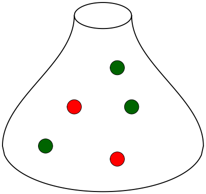
Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Motivační příklad

Příklad 1

V pytlíku jsou 3 zelené a 2 červené kuličky. Náhodně vybereme jednu kuličku, nevracíme ji a vybereme druhou kuličku. Popište rozdělení pravděpodobnosti tohoto pokusu. Jak se toto rozdělení změní v případě, že před druhým výběrem první kuličku vrátíme do pytlíku?

X . . . počet ●, $X \in \{0,1,2\}$
Y . . . počet ●, $Y \in \{0,1,2\}$



a) 1. kuličku **nevracíme**

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	0	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$
1	0	$2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$	0
2	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$	0	0

$\leftarrow p(x,y)$

Motivační příklad

b) 1. kuličku **vracíme**

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	0	$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$
1	0	$2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}$	0
2	$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}$	0	0

$\leftarrow p(x,y)$

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{2!}{x!y!}\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^y & \text{pro } (x,y) \in \{0,1,2\}^2,\ x+y=2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$(X,Y) \sim Mn\left(2, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) \ldots \text{viz Příklad 4}$$

Náhodné vektory

Definice 1

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)' : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je takové zobrazení, že pro $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) \leq \mathbf{x}\} \in \mathcal{A}.$$

Pak $\mathbf{X}$ nazýváme n-**rozměrným náhodným vektorem** (random vector).

Definice 2

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ je n-rozměrný náhodný vektor definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Potom reálnou funkci

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x})$$

definovanou pro každý vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ nazveme **distribuční funkcí náhodného vektoru X**.

Značení: $[\mathbf{X} \in B] = [X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n] = \bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \in B_i\}$,

kde $B = B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{B}^n$.

Distribuční funkce

Věta 3 (Vlastnosti vícerozměrné distribuční funkce)

Pro distribuční funkci náhodného vektoru $\mathbf{X}$ *platí*

- $F(x_1, \ldots, x_n)$ *je* **neklesající** *v každé z proměnných* $x_1, \ldots, x_n$*, při pevně daných hodnotách ostatních proměnných.*
- $F(x_1, \ldots, x_n)$ *je* **zprava spojitá** *v každé z proměnných* $x_1, \ldots, x_n$*, při pevně daných hodnotách ostatních proměnných.*
- *Pro* $\forall\, i = 1, \ldots, n$ *je* $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F(x_1, \ldots, x_n) = 0$*, tj. vícerozměrná distribuční funkce je nulová, jestliže alespoň jedna z proměnných jde k* $-\infty$*.*
- $\lim\limits_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} F(x_1, \ldots, x_n) = 1$*, tj. vícerozměrná distribuční funkce je rovna jedné, jestliže všechny proměnné jdou k* ∞*.*

Diskrétní náhodné vektory

Definice 4

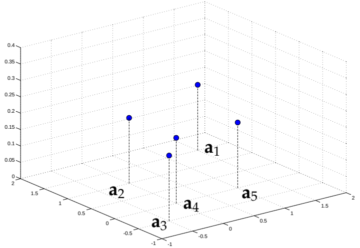
Řekneme, že náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ je **diskrétního typu**, jestliže existuje nejvýše spočetná množina $M \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $P_{\mathbf{X}}(M) = 1$. Funkci $p(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$ nazýváme **pravděpodobnostní funkcí** náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ a M nazýváme **oborem hodnot** náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$.

Značení: Fakt, že jde o diskrétní náhodný vektor budeme značit $\mathbf{X} \sim (M, p)$.

Příklady

Příklad 2 (Rovnoměrné diskrétní rozdělení)

Nechť $G = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *je konečná množina,* $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, n$.
Pravděpodobnost je pro všechny body stejná, (X, Y) *značí souřadnice bodů v* $\mathbb{R}^2$.



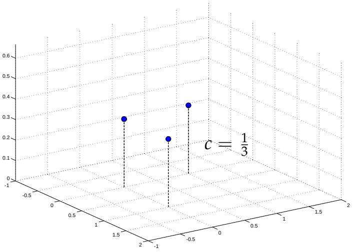
$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } (x,y) \in G \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Náhodný vektor (X, Y) má **rovnoměrné diskrétní** rozdělení na množině G.
Značíme $\boxed{(X, Y) \sim Rd_2(G)}$.

Příklady

Příklad 3

Náhodný vektor (X, Y) *má rovnoměrné diskrétní rozdělení na množině* $G = \{[0,0]; [1,0]; [0,1]\}$.



$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{pro } (x,y) \in G \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$X \backslash Y$	0	1
0	1/3	1/3
1	1/3	0

Příklady

Příklad 4 (Multinomické rozdělení)

Uvažujme pokus, který může mít n disjunktních výsledků $A_1, \ldots, A_n$. Nechť $\theta_i = P(A_i)$ pro $i = 1, \ldots, n$, přičemž $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$. Tento pokus budeme k-krát <u>nezávisle</u> opakovat.

X_i ... **počet nastoupení jevu A_i v provedených k pokusech**.

Nalezněte rozdělení pravděpodobností náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$.

$X_i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ pro $i = 1, \ldots, n$ a pravděpodobnostní funkce je rovna

$$p(\mathbf{x}) = \begin{cases} \binom{k}{x_1}\binom{k-x1}{x_2}\cdots\binom{k-x_1-\cdots-x_{n-1}}{x_n}\,\theta_1^{x_1}\theta_2^{x_2}\cdots\theta_n^{x_n} & \\ \qquad = \frac{k!}{x_1!\cdots x_n!}\,\theta_1^{x_1}\theta_2^{x_2}\cdots\theta_n^{x_n} & \text{pro } x_i \in \{0,1,\ldots,k\},\ \sum_{i=1}^{n} x_i = k \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Značíme $\mathbf{X} \sim Mn(k, \theta_1, \ldots, \theta_n)$.

Příklad

Příklad 5

Hodím kostkou. Poté házím mincí tolikrát, kolik bylo ok na kostce. Náhodná veličina X popisuje počet ok na kostce, náhodná veličina Y popisuje, kolikrát padl „orel“. Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodného vektoru (X,Y).

X ... **počet ok**, $X \in \{1,2,\ldots,6\}$, Y ... **počet „orlů“**, $Y \in \{0,1,\ldots,6\}$

$X \backslash Y$	0	1	2	3	...
1	$\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}$	0	0	...
2	$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{6}\binom{2}{1}\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2$	0	...
3	$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{1}{6}\binom{3}{1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{6}\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}\binom{x}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-y}\left(\frac{1}{2}\right)^{y} & \text{pro } (x,y) \in \{1,2,\ldots,6\} \times \{0,1,\ldots,6\},\ y \leq x \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Spojité náhodné vektory

Definice 5

Řekneme, že náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ definovaný na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je **absolutně spojitého typu**, jestliže existuje **nezáporná integrovatelná funkce** f taková, že rozdělení pravděpodobností

$$P(\mathbf{X} \in B) = \int\limits_B f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int\limits_{B_1} \cdots \int\limits_{B_n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

pro každé

$$B = B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{B}^n.$$

Funkci f nazýváme **hustotou** rozdělení pravděpodobností náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ absolutně spojitého typu, stručněji f je hustotou $\mathbf{X}$.

Značení: Fakt, že jde o spojitý náhodný vektor budeme značit $\mathbf{X} \sim f$.

Spojité náhodné vektory

Věta 6 (Vlastnosti hustoty)

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ *je náhodný vektor absolutně spojitého typu,* f *jeho hustota a* F *jeho distribuční funkce. Pak*

- $f(\mathbf{x}) \geq 0$ *pro každé* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$
- *Protože* $P(\mathbf{X} \in B) = \int\limits_B f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, *pak pro* $B = (-\infty, x_1\rangle \times \cdots \times (-\infty, x_n\rangle$,

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots t_n$$

- *Hustotu lze pomocí distribuční funkce vyjádřit takto*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} F(x_1, \ldots, x_n)$$

přičemž uvedená derivace existuje skoro všude vzhledem k Lebesgueově míře.

Příklad

Příklad 6 (Vícerozměrné rovnoměrné rozdělení)

Řekneme, že náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ *má* **vícerozměrné rovnoměrné rozdělení** *s parametry* $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ *(*$a_i < b_i$*,* $i = 1, \ldots, n$*), pokud její hustota má tvar*

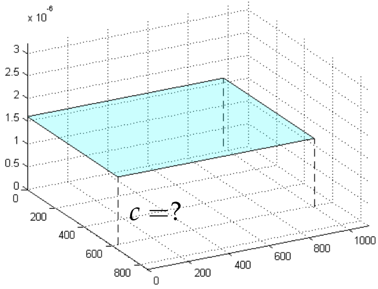
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i - a_i} & \text{pro } x_i \in (a_i, b_i),\ a_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Náhodný vektor budeme značit $\boxed{\mathbf{X} \sim Rs_n(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)}$.

Příklad

Příklad 7 (Squash)

Předpokládáme, že squash hrají dva začátečníci, kterým míček padá zcela náhodně do hřiště. Popište rozdělení pravděpodobnosti náhodného vektoru (X, Y), který označuje souřadnice dopadu míčku. Rozměr squashového kurtu je $640 \times 975\,cm$.



Míček padá „náhodně“ $\Rightarrow$ rovnoměrné rozdělení

$$f(x,y) = \begin{cases} c \text{ pro } (x,y) \in \langle 0;640\rangle \times \langle 0;975\rangle \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

$c = ?$

Musí platit $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$,

tj. **objem** kvádru $= 1$

$640 \cdot 975 \cdot c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{640 \cdot 975}$

$$(X,Y) \sim Rs_2(0, 640, 0, 975)$$

Příklad

Příklad 8 (Vícerozměrné normální rozdělení)

Řekneme, že náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ *má* n-**rozměrné normální (Gaussovo) rozdělení** *s parametry* $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)' \in \mathbb{R}^n$ *a* $\boldsymbol{\Sigma} > 0$*, pokud její hustota má tvar*

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left|\boldsymbol{\Sigma}\right|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})}.$$

Píšeme

$$\boxed{\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}$$

$\boldsymbol{\Sigma} > 0$ *. . . matice je pozitivně definitní a tedy i regulární.*
Symbol $|\boldsymbol{\Sigma}|$ *. . . determinant matice.*

Příklad

Pro $n = 2$:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad \rho \in \langle 0, 1 \rangle$$

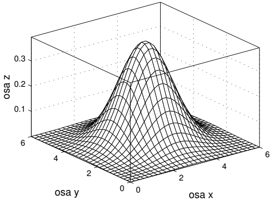
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

Píšeme

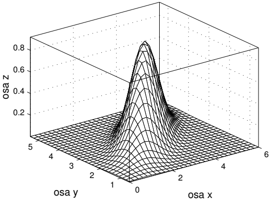
$$\mathbf{X} = (X_1, X_2)' \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$$

Ukázky hustot $f(x_1, x_2) \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

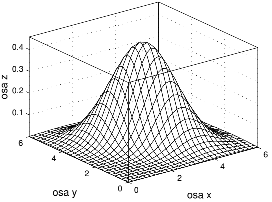
$\mu_1 = 3,\ \mu_2 = 3,\ \sigma_1^2 = 1,\ \sigma_2^2 = 1,\ \rho = 0$



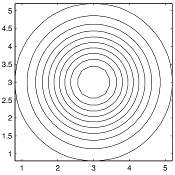
$\mu_1 = 3, \mu_2 = 3,\ \sigma_1^2 = 1,\ \sigma_2^2 = 0.65,\ \rho = 0.75$



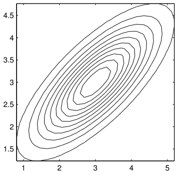
$\mu_1 = 3,\ \mu_2 = 3,\ \sigma_1^2 = 1,\ \sigma_2^2 = 1,\ \rho = -0.5$



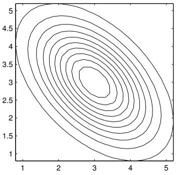
Vrstevnicový graf hustoty



Vrstevnicový graf hustoty



Vrstevnicový graf hustoty



Motivační příklad

Příklad 9 (Chodec a semafor)

Roztržitý profesor přechází silnici aniž by se díval na semafor pro chodce. Pravděpodobnost, že bude zasažen autem je $0,01$, pokud svítí červená, $0,1$ pokud svítí oranžová a $0,8$ pokud svítí zelená. Zelená na semaforu svítí 20% času, oranžová 10% a červená 70%. Určete pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny, která značí zasažení chodce autem.

S ... barva na semaforu, $S \in \{0,1,2\}$, $0 =$ 🔴, $1 =$ 🟠, $2 =$ 🟢
Z ... zasažení chodce autem, $Z \in \{0,1\}$, $0 =$ „ne“, $1 =$ „ano“

$P(Z|S) \Rightarrow$

$Z \backslash S$	🔴	🟠	🟢
„ano“	$0,01$	$0,1$	$0,8$
„ne“	$0,99$	$0,9$	$0,2$

$P(S) \Rightarrow$

S	🔴	🟠	🟢
$P(S)$	$0,7$	$0,1$	$0,2$

$P(Z,S) = P(Z|S)P(S) \Rightarrow$

$Z \backslash S$	🔴	🟠	🟢	$P(Z)$
„ano“	$0,007$	$0,01$	$0,16$	$0,177$
„ne“	$0,693$	$0,09$	$0,04$	$0,823$
$P(S)$	$0,7$	$0,1$	$0,2$	1

$\sum_S P(Z,S)$

Marginální náhodné vektory

Věta 7 (n=2)

- *Nechť* $(X,Y) \sim (M,p)$. *Pak marginální náhodné veličiny* X *a* Y *mají marginální pravděpodobnostní funkce*

$$p_X(x) = \sum_{y \in M_Y} p(x,y), \qquad p_Y(y) = \sum_{x \in M_X} p(x,y),$$

  kde $M = M_X \times M_Y$.
- *Nechť* $(X,Y) \sim f(x,y)$. *Pak marginální náhodné veličiny* X *a* Y *mají marginální hustoty tvaru*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx.$$

Marginální náhodné vektory

Věta 8 (obecně)

Pro přirozené $k < n$ mějme indexy $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ a $\{j_1, \ldots, j_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$.

- *Nechť $\mathbf{X} \sim (M, p)$. Pak marginální náhodný vektor $\mathbf{X}^*$ má marginální pravděpodobnostní funkci rovnu*

$$p^*(\mathbf{x}^*) = p^*(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = P(\mathbf{X}^* = \mathbf{x}^*) = \sum_{x_{j_1} \in M_{j_1}} \cdots \sum_{x_{j_{n-k}} \in M_{j_{n-k}}} p(x_1, \ldots, x_n),$$

  kde $M = M_1 \times \cdots \times M_n$, přičemž M_i je obor hodnot náhodné veličiny X_i, $i = 1, \ldots, n$.

- *Nechť $\mathbf{X}$ je náhodný vektor absolutně spojitého typu s hustotou $f(\mathbf{x})$. Pak marginální náhodný vektor $\mathbf{X}^*$ má marginální hustotu tvaru*

$$f^*(\mathbf{x}^*) = f^*(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{j_1} \ldots dx_{j_{n-k}}.$$

Marginální náhodné vektory

Věta 9 (n=2)

Všechna marginální rozdělení náhodného vektoru (X, Y) jsou jednoznačně určena a pro marginální distribuční funkce $F_X(x)$ a $F_Y(y)$ platí

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y), \qquad F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y).$$

Věta 10 (obecně)

Všechna marginální rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ jsou jednoznačně určena rozdělením náhodného vektoru $\mathbf{X}$, přitom pro marginální distribuční funkci $F^*(\mathbf{x}^*)$ marginálního náhodného vektoru $\mathbf{X}^* = \left(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}\right)'$ platí

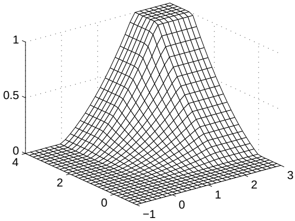
$$F^*(\mathbf{x}^*) = F^*(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \lim_{\substack{x_{j_1}\to\infty \\ \vdots \\ x_{j_{n-k}}\to\infty}} F(x_1, \dots, x_n),$$

kde

$$\{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}.$$

Příklad

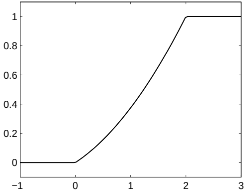
Sdružená distribuční funkce

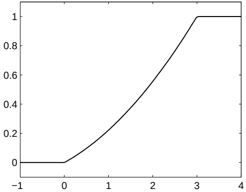


Marginální distribuční funkce

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) & x \in \langle 0, 2\rangle, \\ 1 & x > 2. \end{cases}$$

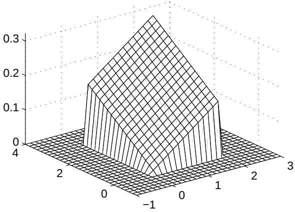
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{6}\left(\frac{y^2}{3} + y\right) & y \in \langle 0, 3\rangle, \\ 1 & y > 3. \end{cases}$$





Sdružená hustota

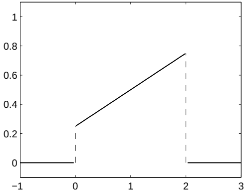
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) & x \in \langle 0, 2\rangle,\ y \in \langle 0, 3\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

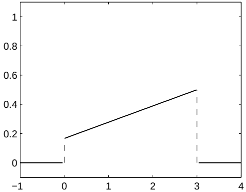


Marginální hustoty

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+1) & x \in \langle 0, 2\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6}\left(\frac{2y}{3} + 1\right) & y \in \langle 0, 3\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$





Motivační příklad

Příklad 10 (Piráti silnic)

Na daném úseku měříme rychlost aut. Zaznamenáváme barvu auta a překročení povolené rychlosti. Pozorovali jsme 100 aut, z nichž 30 bylo modrých, 20 zelených a 50 červených. Tabulka uvádí relativní četnosti aut, která překročila povolenou rychlost. Zjistěte, zda překročení rychlosti **závisí** *na barvě auta.*

	modrá	*zelená*	*červená*
nepřekročí	$0,18$	$0,12$	$0,3$
překročí	$0,12$	$0,08$	$0,2$

X ... překročení rychlosti, Y ... barva auta
X **nezávisí** na Y, pak

$$P(X|Y) \overset{?}{=} P(X) \Leftrightarrow \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = P(X)$$

$$\Leftrightarrow P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)}$$

Příklad

X \ Y	modrá	zelená	červená	$p_X(x)$
nepřekročí	$0,18$	$0,12$	$0,3$	$0,6$
překročí	$0,12$	$0,08$	$0,2$	$0,4$
$p_Y(y)$	$0,3$	$0,2$	$0,5$	1

Je třeba ověřit $p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$, tj.

$$\begin{aligned} 0,18 &= 0,3 \cdot 0,6 \\ 0,12 &= 0,2 \cdot 0,6 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \end{aligned}$$

Nezávislé náhodné veličiny

Definice 11

Řekneme, že náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou (stochasticky) **nezávislé** (**independent**), jestliže jsou nezávislé náhodné jevy $\{X_1 \leq x_1\}, \ldots, \{X_n \leq x_n\}$ pro libovolné $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$.

Věta 12

- *Mějme* **diskrétní** *náhodný vektor* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)' \sim (M, p)$. *Pak* $X_1, \ldots, X_n$ *jsou nezávislé, právě když*

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i) \quad \textit{pro} \quad \forall\, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n,$$

kde pro $i = 1, \ldots, n$ *je* $p_i(x_i)$ *marginální pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny* X_i.

- *Nechť* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ *je* **absolutně spojitý** *náhodný vektor se sdruženou hustotou* $f(x_1, \ldots, x_n)$. *Pak* $X_1, \ldots, X_n$ *jsou nezávislé, právě když*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i) \quad \textit{pro} \quad s.v.\ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n,$$

kde pro $i = 1, \ldots, n$ *je* $f_i(x_i)$ *marginální hustota náhodné veličiny* X_i.

Nezávislé náhodné veličiny

Věta 13

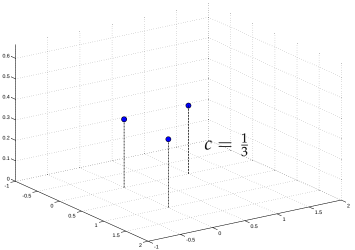
Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ *má sdruženou distribuční funkci* $F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_n)$ *a nechť pro* $i = 1, \ldots, n$ *je* $F_i(x)$ *marginální distribuční funkce náhodné veličiny* X_i*. Pak náhodné veličiny* $X_1, \ldots, X_n$ *jsou (stochasticky)* **nezávislé**, *právě když*

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i) \quad \text{pro} \quad \forall\, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n.$$

Příklad

Příklad 11

Náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné diskrétní rozdělení na množině $G = \{[0,0];[1,0];[0,1]\}$. Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?



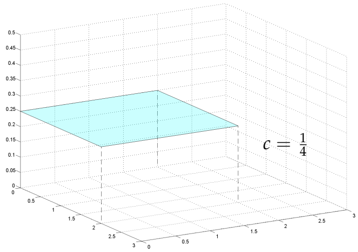
$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{pro } (x,y) \in G \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$X \setminus Y$	0	1	$p_X(x)$
0	1/3	1/3	2/3
1	1/3	0	1/3
$p_Y(y)$	2/3	1/3	1

Příklad

Příklad 12

Náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné spojité rozdělení na množině $G = \langle 0;2\rangle \times \langle 0;2\rangle$. Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?



$$f(x,y) = \begin{cases} \boxed{\frac{1}{4}} & \text{pro } (x,y) \in G \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^2 \frac{1}{4}dy = \boxed{\frac{1}{2}}$$

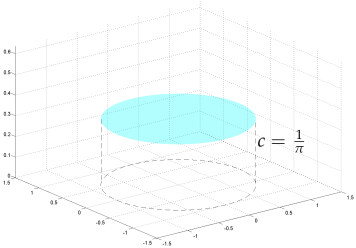
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^2 \frac{1}{4}dx = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Příklad

Příklad 13

Náhodný vektor (X, Y) *má rovnoměrné spojité rozdělení na množině* $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. *Jsou náhodné veličiny* X *a* Y *nezávislé?*



$$f(x,y) = \begin{cases} \boxed{\frac{1}{\pi}} & \text{pro } (x,y) \in G \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \boxed{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx = \boxed{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}}$$

$$f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$$