# Teorie epidemií

## Modelování a teorie sítí

Petr Liška

http://networksciencebook.com/

11.12.2019

# Jednoduchý SIS model

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = \beta\langle k\rangle S(t)I(t) - \mu I(t) = \beta\langle k\rangle I(t)(1 - I(t)) - \mu I(t), \qquad I(0) = I_0.$$

$$I = \left(1 - \frac{\mu}{\beta\langle k\rangle}\right)\frac{C\mathrm{e}^{(\beta\langle k\rangle - \mu)t}}{1 + C\mathrm{e}^{(\beta\langle k\rangle - \mu)t}}, \quad C = \frac{I_0}{1 - I_0 - \frac{\mu}{\beta\langle k\rangle}}$$

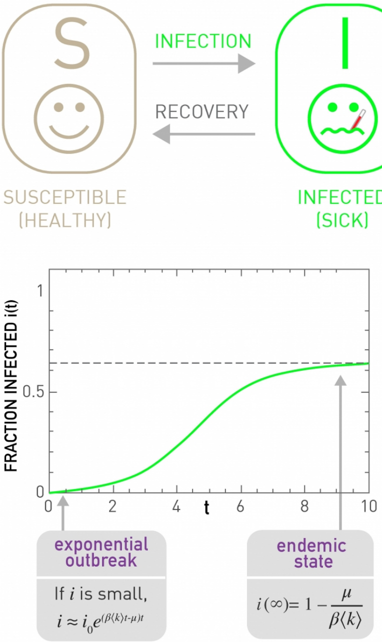
Dvě možnosti:

- **Endemický stav** ($\mu < \beta\langle k\rangle$)

$$I(\infty) = 1 - \frac{\mu}{\beta\langle k\rangle}$$

- **Nemoc je vyhlazena** ($\mu > \beta\langle k\rangle$)

$$I(\infty) = 0$$

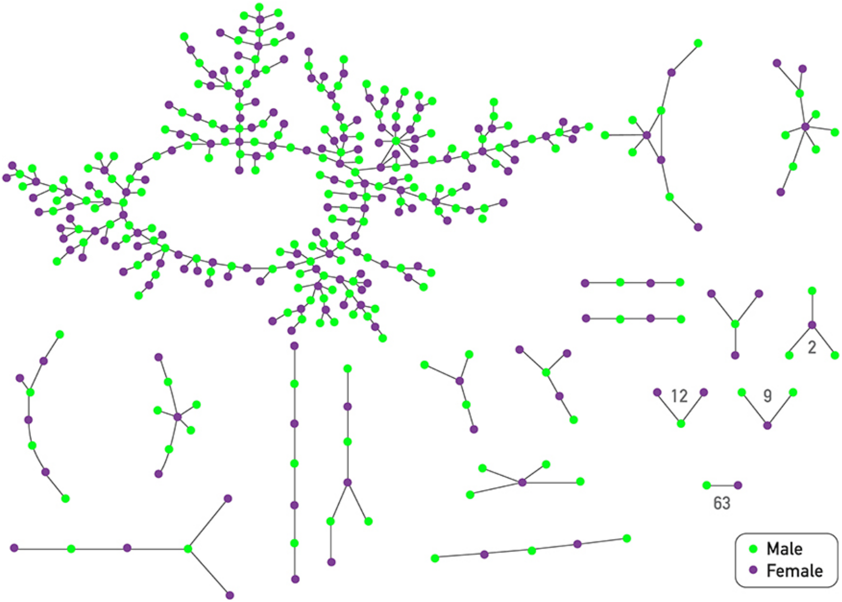

S
INFECTION
RECOVERY
I
SUSCEPTIBLE
(HEALTHY)
INFECTED
(SICK)
FRACTION INFECTED i(t)
1
0.5
0
0
2
4
t
6
8
10
exponential outbreak
If $i$ is small,
$i \approx i_0 e^{(\beta\langle k\rangle t-\mu)t}$
endemic state
$i(\infty) = 1 - \frac{\mu}{\beta\langle k\rangle}$

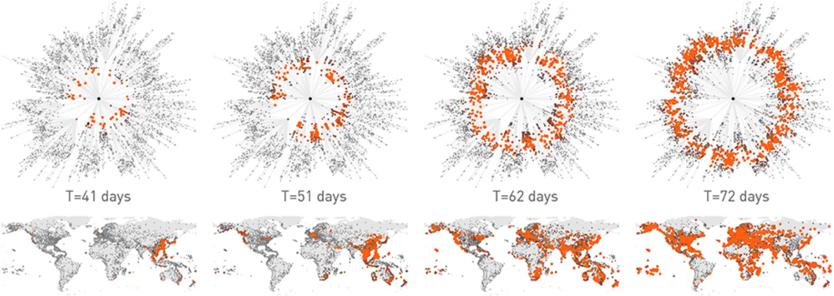
# Charakteristický čas a reprodukční číslo

Charakteristický čas $I(\tau) = \frac{1}{\mathrm{e}}$

$$\tau = \frac{1}{\mu\left(\frac{\beta\langle k\rangle}{\mu} - 1\right)} = \frac{1}{\mu(R_0 - 1)}$$

| Nemoc | $R_0$ |
|---|---|
| spalničky | 12–18 |
| černý kašel | 12–17 |
| záškrt | 6–7 |
| neštovice | 5–7 |
| dětská obrna | 5–7 |
| zarděnky | 5–7 |
| příušnice | 4–7 |
| HIV/AIDS | 2–5 |
| SARS | 2–5 |
| chřipka | 2–3 |


2
12
9
63
Male
Female


T=41 days
T=51 days
T=62 days
T=72 days

## Náhodná síť - definice podle Gilberta

Každý pár z $N$ uzlů je spojen s pravděpodobností $p$.

Pravděpodobnost, že síť má právě $L$ hran:

$$p_L = \binom{\frac{N(N-1)}{2}}{L} p^L (1-p)^{\frac{N(N-1)}{2}-L}$$

Očekávaný počet hran

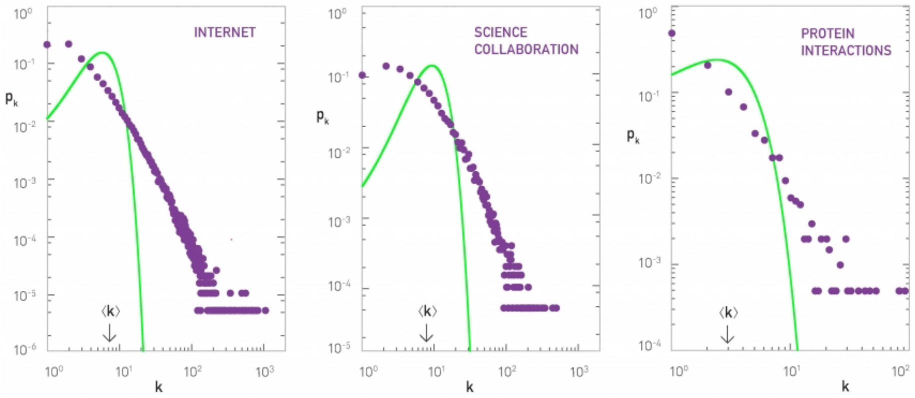
$$\langle L \rangle = \sum_{L=0}^{\frac{N(N-1)}{2}} L p_L = p\frac{N(N-1)}{2}$$

Průměrný stupeň uzlu

$$\langle k \rangle = \frac{2\langle L \rangle}{N} = p(N-1)$$

Distribuce uzlů

$$p_k = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \approx \mathrm{e}^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$$



INTERNET
SCIENCE
COLLABORATION
PROTEIN
INTERACTIONS
$p_k$
k
⟨k⟩

# Svět je malý

$$N(d) \approx 1 + \langle k \rangle + \langle k \rangle^2 + \cdots + \langle k \rangle^d = \frac{\langle k \rangle^{d+1} - 1}{\langle k \rangle - 1} \approx \langle k \rangle^d$$

$$N(d_{max}) \approx N \approx \langle k \rangle^{d_{max}}$$

$$d_{max} \approx \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle}$$

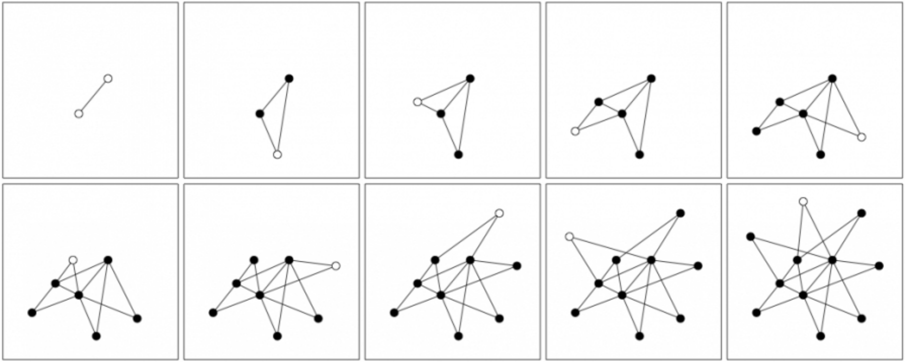
$$\langle d \rangle \approx \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle}$$

$$\langle d \rangle \approx \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle} = \frac{\ln(8 \cdot 10^9)}{\ln 10^3} = 3{,}3$$

# Bezškálová síť, Barabási-Albert model

**Růst** - v každém kroku přidáme uzel s *m* novými spojeními
**Preferential attachment** - pravděpodobnost $\prod(k)$, že spojení nového uzlu bude navázáno na starý uzel *i* je dána

$$\prod(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$



# Jaký je stupeň uzlu?

$$\frac{\mathrm{d}k_i}{\mathrm{d}t} = m\prod(k_i) = m\frac{k_i}{\sum\limits_{j=1}^{N-1} k_j} = \frac{mk_i}{2mt - m} = \frac{k_i}{2t - 1} \approx \frac{k_i}{2t}$$

$$\frac{\mathrm{d}k_i}{k_i} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}t}{t}, \qquad k_i(t_i) = m$$

$$k_i(t) = m\left(\frac{t}{t_i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

# Jaká je distribuce stupňů uzlů?

Kolik uzlů má stupeň menší než $k$?

$$m\left(\frac{t}{t_i}\right)^{\frac{1}{2}} < k \Longrightarrow t_i < t\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dohromady máme $N = m_0 + t \approx t$ uzlů. Pravděpodobnost, že vybereme uzel stupně menšího než $k$

$$P(k) = 1 - \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Distribuce pak je

$$p_k = \frac{\partial P(k)}{\partial k} = \frac{2m^2}{k^3}$$

# Friendship paradox

$$k_n(k_i) = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle}$$

Pro náhodné sítě platí

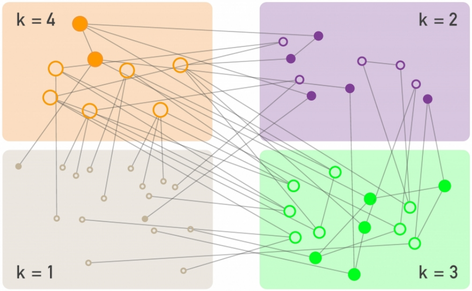
$$k_n(k_i) = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} = \frac{\langle k \rangle (1 + \langle k \rangle)}{\langle k \rangle} = 1 + \langle k \rangle$$

Pro bezškálovou síť platí

$$\langle k^2 \rangle \to \infty \quad \text{pro} \quad N \to \infty$$

| Síť | $N$ | $L$ | $\langle k \rangle$ | $\langle k^2 \rangle$ |
|---|---|---|---|---|
| Internet | 192 244 | 609 066 | 6,34 | 240,1 |
| Vědci | 23 133 | 93 439 | 8,08 | 178,2 |
| Herci | 702 388 | 29 397 908 | 83,71 | 47 353 |

# Model epidemie na síti




$$\frac{\mathrm{d}I_k}{\mathrm{d}t} = \beta(1 - I_k)k\Theta_k - \mu I_k$$

$$\Theta_k = \frac{\sum_{k'} k' p_{k'} I_{k'}}{\sum_{k} k p_k} = \frac{\sum_{k'} k' p_{k'} I_{k'}}{\langle k \rangle}$$

$$\tau = \frac{\langle k \rangle}{\beta \langle k^2 \rangle - \mu \langle k \rangle}$$