Program a domácí úkol z třetího cvičení 5.10.2018

Program. Součet podprostorů (řešený 2.1b,c), afinní repér (vrcholy rovnoběžnostěnu), transformace od repéru k repéru (př 14), orientace afinního prostoru (úloha 4.1), parametrické vyjádření podprostoru

Příklad 1. *V $\mathcal{A}_3$ je dán rovnoběžnostěn ABCDEFGH a repéry $\mathcal{R}_1 = \langle A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\rangle$ a $\mathcal{R}_2 = \langle C; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG}\rangle$. Určete:*

- *transformační rovnice od $\mathcal{R}_1$ k $\mathcal{R}_2$*
- *transformační rovnice od $\mathcal{R}_2$ k $\mathcal{R}_1$*

Nápověda: *Ještě než začnete s tvorbou transformačních rovnic, je potřeba mít vše vyjádřené vůči nějakému pevnému, tzn. stejnému repéru. Například $\mathcal{R}_2$ bychom vůči $\mathcal{R}_1$ vyjádřili jako $\mathcal{R}_2 = \langle [1,1,0], (0,-1,0), (-1,0,0), (0,0,1)\rangle$.*

Příklad 2. *Jsou dány dva afinní podprostory $\mathcal{B}_1 = [2,2,3,2] + t(1,1,2,1) + s(1,1,0,-1)$ a $\mathcal{B}_2 = \langle [1,0,1,1], [2,1,0,1], [1,0,1,2], [0,0,1,1]\rangle$. Určete:*

- *zda se dané podprostory protínají*
- *jaká je dimenze součtu $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$*
- *nějakou bázi součtu $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$*

Slíbený postup získání transformačních rovnic Nalezněte matice přechodu od repéru $\mathcal{U}$ k repéru $\mathcal{V}$ a určete souřadnice bodu X v těchto repérech, je-li (všechny souřadnice jsou zadány v nějakém pevném repéru $\mathcal{E}$):

- $\mathcal{U} = \{U; \mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_3\} = \{[1,1,1]; (4,0,2); (3,1,1); (-1,4,0)\}$,
- $\mathcal{V} = \{V; \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\} = \{[-4,11,1]; (1,-1,1); (10,8,6); (8,13,5)\}$,
- $X[1,2,3]$.

Řešení. Naším prvním úkolem bude najít dvě matice A, B tak, aby platilo

$$(X)_{\mathcal{U}} = A \cdot (X)_{\mathcal{V}} + B \tag{1}$$

Ukážeme přitom dva různé postupy řešení, nejprve „maticově“ (tj. tak jako na cvičení), poté z definice matice přechodu.

1. Místo abychom určovali přímo matice A a B, zkusíme určit nejdříve matice přechodu (a příslušné matice souřadnic počátků) z referenčního repéru $\mathcal{E}$ do $\mathcal{U}$, resp. $\mathcal{V}$. Hledáme proto matice C, D, E, F takové, že bude platit

$$(X)_{\mathcal{E}} = C \cdot (X)_{\mathcal{U}} + D \tag{2}$$
$$(X)_{\mathcal{E}} = E \cdot (X)_{\mathcal{V}} + F \tag{3}$$

Pro souřadnice vektorů platí tytéž transformační rovnice, jen bez matic D, F:

$$(\mathbf{x})_{\mathcal{E}} = C \cdot (\mathbf{x})_{\mathcal{U}}$$
$$(\mathbf{x})_{\mathcal{E}} = E \cdot (\mathbf{x})_{\mathcal{V}}$$

Určíme matice C, E. Když např. do $(\mathbf{x})_{\mathcal{U}}$ dosadíme postupně souřadnice vektorů $(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)$ (toto jsou vlastně souřadnice vektorů báze $\mathcal{U}$ vzhledem k repéru $\mathcal{U}$!), musíme na levé straně postupně dostat souřadnice bázových vektorů z $\mathcal{U}$ vzhledem k referenčnímu repéru $\mathcal{E}$. Tyto souřadnice tedy musí být v matici C postupně ve sloupcích. Obdobnou úvahou pro matici E získáme podobu jednotlivých matic (ověřte si, že skutečně po pronásobení vektory $(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)$ zprava dostaneme skutečně souřadnice bázových vektorů $\mathcal{U}$ vzhledem k $\mathcal{E}$!):

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 8 \\ -1 & 8 & 13 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Určíme matice D, F. Když např. do $(X)_{\mathcal{U}}$ (z vyjádření (2)) dosadíme souřadnice bodu $[0,0,0]$ (to jsou souřadnice bodu U vzhledem k repéru $\mathcal{U}$), musíme na levé straně dostat souřadnice bodu U vzhledem k referenčnímu repéru $\mathcal{E}$. Je proto asi jasné, že matice D a F budou vypadat takto (opět zkuste ověřit pronásobením):

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Porovnáním maticových rovnic (2) a (3) dostáváme rovnost, kterou dále upravíme na hledaný tvar ve vyjádření (1):

$$\begin{aligned} C \cdot (X)_{\mathcal{U}} + D &= E \cdot (X)_{\mathcal{V}} + F \\ C \cdot (X)_{\mathcal{U}} &= E \cdot (X)_{\mathcal{V}} + F - D \\ (X)_{\mathcal{U}} &= \underbrace{(C^{-1} \cdot E)}_{A} \cdot (X)_{\mathcal{V}} + \underbrace{\left(C^{-1} \cdot (F - D)\right)}_{B} \end{aligned}$$

Konkrétní tvar matic A, B dostaneme např. tak, že vedle sebe postupně napíšeme do oddělených bloků matice C, E a $F - D$, následně pak upravíme blok matice C na jednotkovou matici – v prostředním bloku dostaneme matici $A = (C^{-1} \cdot E)$, v pravém bloku $B = C^{-1} \cdot (F - D)$.

$$\left(\begin{array}{ccc||ccc||c} 4 & 3 & -1 & 1 & 10 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 8 & 13 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc||ccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Výsledky doplníme do rovnice (1):

$$(X)_{\mathcal{U}} = A \cdot (X)_{\mathcal{V}} + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot (X)_{\mathcal{V}} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Nyní ještě musíme vypočítat souřadnice bodu X v obou repérech. Využijeme k tomu rovnici (3), vypočteme souřadnice X v repéru $\mathcal{V}$ a pak pomocí (4) souřadnice v repéru $\mathcal{U}$ (děláme to tak, protože je to asi nejlehčí, při přechodu zprava doleva stačí jen dosadit souřadnice, kdežto zleva doprava je nutné vypočítat inverzní matici nebo řešit soustavu rovnic).

Dosadíme souřadnice bodu do rovnice (3) (uvádíme již v roznásobené formě):

$$\begin{aligned} 1 &= x_1 + 10x_2 + 8x_3 - 4 \\ 2 &= -x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 11 \\ 3 &= x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 1 \end{aligned}$$

Dále řešíme tuto soustavu.

$$\left(\begin{array}{ccc||c} 1 & 10 & 8 & 5 \\ -1 & 8 & 13 & -9 \\ 1 & 6 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{array}\right)$$

Stačí už jen dosadit vypočítané souřadnice do vyjádření (4) a zjistit souřadnice bodu X vzhledem k repéru $\mathcal{U}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{7}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Výsledky přehledně shrneme.

$$(X)_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot (X)_{\mathcal{V}} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$X = \left[\tfrac{5}{2}; -3; 1\right]_{\mathcal{U}} = \left[-\tfrac{4}{3}; \tfrac{5}{2}; -\tfrac{7}{3}\right]_{\mathcal{V}},$$

2. Nyní ukážeme jiný způsob, jak najít matici A, a to přímo z definice matice přechodu. Podobně jako v prvním domácím úkolu hledáme koeficienty $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$ takové, že bude splněna soustava rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_2 &= d\mathbf{u}_1 + e\mathbf{u}_2 + f\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_3 &= g\mathbf{u}_1 + h\mathbf{u}_2 + i\mathbf{u}_3 \end{aligned} \iff \begin{aligned} (1,-1,1) &= a(4,0,2) + b(3,1,1) + c(-1,4,0) \\ (10,8,6) &= d(4,0,2) + e(3,1,1) + f(-1,4,0) \\ (8,13,5) &= g(4,0,2) + h(3,1,1) + i(-1,4,0) \end{aligned}$$

Rozepsáním rovnic získáme tři soustavy rovnic, kde má každá soustava tři rovnice a tři neznámé.

$$\begin{aligned} 1 &= 4a + 3b - c \\ -1 &= \quad + b + 4c \\ 1 &= 2a + b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 10 &= 4d + 3e - f \\ 8 &= \quad + e + 4f \\ 6 &= 2d + e \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 8 &= 4g + 3h - i \\ 13 &= \quad + h + 4i \\ 5 &= 2g + h \end{aligned}$$

Je vidět, že se prakticky jedná o jednu soustavu s odlišnými absolutními členy a jiným označením neznámých. Proto můžeme řešit všechny tři soustavy naráz úpravou levého bloku následující matice na jednotkovou matici (abychom mohli přímo odečíst matici A):

$$\left(\begin{array}{ccc||c|c|c} 4 & 3 & -1 & 1 & 10 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 8 & 13 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 6 & 5 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc||c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Pravý blok upravené matice (oddělený dvojitou čarou) je zřejmě hledanou maticí přechodu od báze $\mathcal{U}$ k bázi $\mathcal{V}$, neboť se vlastně jedná o matici řešení soustav ve tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccc||c|c|c} 1 & 0 & 0 & a & d & g \\ 0 & 1 & 0 & b & e & h \\ 0 & 0 & 1 & c & f & i \end{array}\right), \text{ (pokud nedošlo k výměně sloupců!)}$$

Tedy $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Způsobem popsaným v první části řešení dostaneme matici B, problém nastává při přepočtu souřadnic bodu X, protože nemáme k dispozici (zatím…) nějaké matice přechodu mezi repéry $\mathcal{E}$ a $\mathcal{U}$ nebo $\mathcal{V}$. Protože ale máme transformační rovnice od repéru $\mathcal{U}$ k repéru $\mathcal{V}$, vypočítáme matice přechodu od repéru $\mathcal{V}$ k repéru $\mathcal{E}$ a souřadnice pak jen dosadíme do již známé rovnice.

Hledáme proto koeficienty $j, k, l, m, n, o, p, q, r \in \mathbb{R}$ takové, že bude splněna soustava rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= j\mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2 + l\mathbf{v}_3 \\ \mathbf{e}_2 &= m\mathbf{v}_1 + n\mathbf{v}_2 + o\mathbf{v}_3 \\ \mathbf{e}_3 &= p\mathbf{v}_1 + q\mathbf{v}_2 + r\mathbf{v}_3 \end{aligned} \iff \begin{aligned} (1,0,0) &= j(1,-1,1) + k(10,8,6) + l(8,13,5) \\ (0,1,0) &= m(1,-1,1) + n(10,8,6) + o(8,13,5) \\ (0,0,1) &= p(1,-1,1) + q(10,8,6) + r(8,13,5) \end{aligned}$$

Rozepsáním rovnic získáme tři soustavy rovnic, kde má každá soustava tři rovnice a tři neznámé.

$$\begin{aligned} 1 &= j + 10k + 8l \\ 0 &= -j + 8k + 13l \\ 0 &= j + 6k + 5l \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0 &= m + 10n + 8o \\ 1 &= -m + 8n + 13o \\ 0 &= m + 6n + 5o \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0 &= p + 10q + 8r \\ 0 &= -p + 8q + 13r \\ 0 &= p + 6q + 5r \end{aligned}$$

Můžeme opět řešit všechny tři soustavy naráz úpravou levého bloku následující matice na jednotkovou matici (abychom mohli přímo odečíst hledanou matici přechodu – všimněte si, že vlastně takhle počítáme inverzní matici k matici E! – s ohledem na očekávaný výsledek to nebude hezké počítání...

$$\left(\begin{array}{ccc||c|c|c} 1 & 10 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 13 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc||c|c|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{19}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{11}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{15} & \frac{2}{15} & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

Platí tedy

$$(X)_{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{11}{15} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{7}{10} \\ -\frac{7}{15} & \frac{2}{15} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot (X)_{\mathcal{E}} + G$$

Matice G je zatím neznámá matice souřadnic počátku repéru $\mathcal{E}$ v souřadnicích vzhledem k $\mathcal{V}$. Tu je ale nutné vypočítat, neboť odhadnout ji asi není v našich silách. Bude se jednat vlastně o řešení rovnice se třemi parametry s, t, u, která přejde na soustavu o třech rovnicích se třemi neznámými.

$$[0,0,0] = [-4,11,1] + s(1,-1,1) + t(10,8,6) + u(8,13,5)$$

$$\begin{aligned} 4 &= s + 10t + 8u \\ -11 &= -s + 8t + 13u \\ -1 &= s + 6t + 5u \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 8 & 4 \\ -1 & 8 & 13 & -11 \\ 1 & 6 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{98}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{21}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{59}{15} \end{array}\right)$$

Nyní už můžeme dosadit souřadnice bodu X do transformačních rovnic.

$$\begin{pmatrix} -\frac{19}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{11}{15} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{7}{10} \\ -\frac{7}{15} & \frac{2}{15} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{98}{15} \\ \frac{21}{5} \\ -\frac{59}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{7}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Výsledky přehledně shrneme.

$$(X)_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot (X)_{\mathcal{V}} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$X = \left[\tfrac{5}{2}; -3; 1\right]_{\mathcal{U}} = \left[-\tfrac{4}{3}; \tfrac{5}{2}; -\tfrac{7}{3}\right]_{\mathcal{V}},$$

Resumé: K výsledku vede několik cest, některé jsou však podstatně trnitější, než jiné…