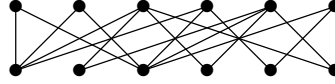
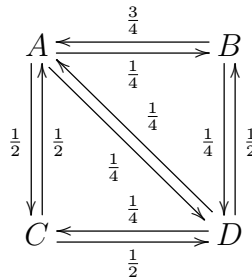


## Teorie grafů – podzim 2018 – 4. termín

1. (10 bodů) Nalezněte největší párování v následujícím grafu. Svoje tvrzení zdůvodněte.



2. (10 bodů) Následující graf vyjadřuje pravděpodobnost, do které z místností  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  se nehlídané dítě přesune během jedné minuty. Určete, do které místnosti je třeba dítě umístit, chceme-li maximalizovat pravděpodobnost, že když se je po čtyřech minutách vydáme hledat, najdeme je hned v první prohledávané místnosti. (Jako první prohledáváme samozřejmě místnost, kde se dítě nachází s největší pravděpodobností.)



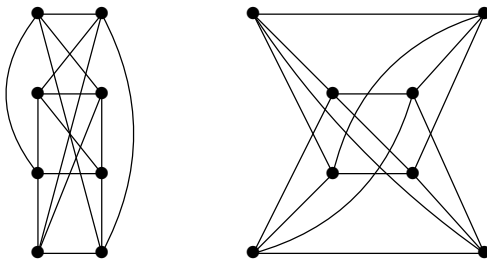
3. (5 bodů) Dejte příklad souvislého grafu  $G$  s devíti nebo deseti vrcholy takového, že velikost nejmenšího vrcholového pokrytí  $G$  je o 2 vyšší než velikost největšího párování na  $G$ . Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.
4. (5 bodů) Dejte příklad souvislého grafu se šesti vrcholy, který má právě 16 koster. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.
5. (5 bodů) Dejte příklad grafu  $G$  s devíti vrcholy, který má 25 hran a splňuje  $\kappa(G) = 2$  a  $\kappa'(G) = 4$ . Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.
6. (10 bodů) Určete, pro která přirozená čísla  $x$  a  $y$  je posloupnost

$$(1, 1, 1, x, x, x, 5, y)$$

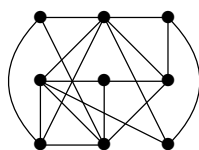
skórem nějakého grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty  $x$  a  $y$  dejte příklad grafu s tímto skóre.

7. (10 bodů) Najděte všechny vzájemně neizomorfní obyčejné grafy  $G$  s pěti vrcholy takové, že  $\chi'(G) = \chi(G)$  a existují právě dva izomorfismy  $G$  na  $G$ .

8. (8 bodů) Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.



9. (7 bodů) Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. (10 bodů) Necht  $n \geq 1$  je přirozené číslo a  $G$  je obyčejný graf s vrcholy

$$u_1, \dots, u_{n+1}, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_{n+1}$$

a hranami

$$\begin{array}{ll} u_i u_j, w_i w_j & \text{pro } i, j \in \{1, \dots, n+1\}, i \neq j, \\ u_i v_j, w_i v_j & \text{pro } i \in \{1, \dots, n+1\}, j \in \{1, \dots, n\}. \end{array}$$

Určete hranovou a vrcholovou souvislost  $G$ , jeho hranové a vrcholové chromatické číslo a zda je  $G$  eulerovský či hamiltonovský.

11. (5 bodů) Definujte síť a tok v síti.
12. (5 bodů) Formulujte Ramseyho větu pro  $k$  barev.
13. (10 bodů) Dokažte, že každý 2-souvislý graf o  $n$  vrcholech, který není izomorfní grafu  $C_n$ , má alespoň  $3n - 4$  koster.