Úlohy

2.6 Vyjádřete v goniometrickém tvaru čísla:

$$1-\mathrm{i},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -5+5\mathrm{i},\ 3\sqrt{2}+3\mathrm{i}\sqrt{2},\ -\mathrm{i}\sqrt{3},\ -\pi,\ \pi\mathrm{i},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$

2.7 V goniometrickém tvaru vyjádřete čísla:

$$\frac{2}{-1+\mathrm{i}},\ \frac{1}{2\mathrm{i}},\ \frac{-3+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}},\ |3+2\mathrm{i}|,\ -\frac{1}{\mathrm{i}},\ \mathrm{i}^{80},\ (1-\mathrm{i})^2,\ (1-\mathrm{i})^2+2\mathrm{i}$$

2.8 V algebraickém tvaru vyjádřete čísla:

a) $2\left(\cos\frac{1}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{1}{4}\pi\right)$ b) $\frac{1}{2}(\cos 193\pi+\mathrm{i}\sin 193\pi)$

c) $\cos\frac{1}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{1}{3}\pi$ d) $\cos\left(-\frac{5}{3}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{3}\pi\right)$

*2.9 V goniometrickém tvaru vyjádřete čísla:

a) $1+\cos\frac{1}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{1}{4}\pi$ b) $1+\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$

c) $\sin\varphi+\mathrm{i}\cos\varphi$

2.10 Ze všech komplexních čísel z, pro něž je $|z+25\mathrm{i}|\leqq 15$, vyberte ta, která mají v intervalu $\langle 0,2\pi)$ největší argument.

2.3 Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru

Jednou z výhod zápisu komplexních čísel v goniometrickém tvaru je to, že lze snadno určit jejich součin a podíl; přesvědčíme se o tom v následujícím textu.

Zvolme komplexní čísla z_1, z_2 vyjádřená v goniometrickém tvaru takto:

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1),\quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)$$

Protože jsou dána v goniometrickém tvaru, jsou obě různá od nuly, takže v případě dělení těchto čísel je dělitel nenulový. Pro součin z_1z_2 platí:

$$\begin{aligned}z_1z_2&=[r_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)][r_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)]=\\&=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+\\&\qquad+\mathrm{i}(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)]\end{aligned}$$

Připomeneme-li si součtové vzorce pro sinus a kosinus, tj. vzorce

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\\\sin(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta,\end{aligned}$$

vidíme, že platí

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Dokázali jsme tak, že pro libovolná komplexní čísla

$$r_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1),\quad r_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)$$

platí

$$\begin{aligned}r_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)&=\\=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)].\end{aligned}$$

Součin z_1z_2 **libovolných nenulových komplexních čísel** z_1, z_2 **s argumenty** φ_1, φ_2 **je roven komplexnímu číslu** $r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$, **kde** $r=|z_1||z_2|$ **a** $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$.

Pro podíl $\frac{z_1}{z_2}$ komplexních čísel

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1),\quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)$$

dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-\mathrm{i}\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}=\\&=\frac{r_1}{r_2}[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+\\&\qquad+\mathrm{i}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)].\end{aligned}$$

Připomeneme-li si opět známé vzorce

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

dostaneme

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

Dokázali jsme tak, že pro libovolná komplexní čísla

$$r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1), \quad r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$$

platí

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

Podíl $\frac{z_1}{z_2}$ libovolných nenulových komplexních čísel z_1, z_2 s argumenty φ_1, φ_2 je roven komplexnímu číslu $r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, kde $r = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ a $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Je užitečné zapamatovat si důsledek této věty:

$$\frac{1}{\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi} = \cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi)$$

Je totiž:

$$\frac{1}{\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi} = \frac{\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0}{\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi} =$$
$$= \cos(0 - \varphi) + \mathrm{i}\sin(0 - \varphi) = \cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi)$$

Příklad 8

Určete součin z_1z_2 a podíl $\frac{z_1}{z_2}$ komplexních čísel

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{1}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\tfrac{1}{4}\pi\right), \quad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{7}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\tfrac{7}{4}\pi\right).$$

Řešení

Podle uvedených vět platí:

$$z_1z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{1}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\tfrac{1}{4}\pi\right)\cdot\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{7}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\tfrac{7}{4}\pi\right) =$$
$$= 4\left[\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{7}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{7}{4}\pi\right)\right] = 4(\cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi) = 4$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{1}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\tfrac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{7}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\tfrac{7}{4}\pi\right)} =$$
$$= 2\left[\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{7}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{7}{4}\pi\right)\right] =$$
$$= 2\left[\cos\left(-\tfrac{3}{2}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\tfrac{3}{2}\pi\right)\right] = 2\left(\cos\tfrac{1}{2}\pi + \mathrm{i}\sin\tfrac{1}{2}\pi\right) = 2\mathrm{i}$$

Získané výsledky si můžete ověřit třeba takto:

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{1}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\tfrac{1}{4}\pi\right) = 2 + 2\mathrm{i},$$
$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{7}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\tfrac{7}{4}\pi\right) = 1 - \mathrm{i},$$

takže

$$z_1z_2 = (2 + 2\mathrm{i})(1 - \mathrm{i}) = 4, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 2\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \frac{(2 + 2\mathrm{i})(1 + \mathrm{i})}{(1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})} = 2\mathrm{i}.$$

Větu o násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru lze matematickou indukcí zobecnit na součin libovolného počtu činitelů (o důkaz se můžete pokusit v úloze 2.13):

$$r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)\cdot\ldots\cdot r_n(\cos\varphi_n + \mathrm{i}\sin\varphi_n) =$$
$$= r_1r_2\cdot\ldots\cdot r_n\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)\right]$$

Příklad 9

Určete součin komplexních čísel

$$z_1 = \frac{1}{\cos\frac{3}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi}, \quad z_2 = \frac{1}{\cos\frac{5}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi},$$
$$z_3 = \frac{1}{\cos\frac{4}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{4}{3}\pi}.$$

Řešení

Uvědomíme-li si, že

$$z_1 = \cos\left(-\tfrac{3}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\tfrac{3}{4}\pi\right), \quad z_2 = \cos\left(-\tfrac{5}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\tfrac{5}{6}\pi\right),$$
$$z_3 = \cos\left(-\tfrac{4}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\tfrac{4}{3}\pi\right),$$

dostaneme

$$z_1z_2z_3 = \cos\left(-\tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{5}{6}\pi - \tfrac{4}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{5}{6}\pi - \tfrac{4}{3}\pi\right) =$$
$$= \cos\left(-\tfrac{35}{12}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\tfrac{35}{12}\pi\right) = \cos\tfrac{13}{12}\pi + \mathrm{i}\sin\tfrac{13}{12}\pi.$$

Následujícím příkladem se nedejte zastrašit, v podstatě je velmi jednoduchý.

Příklad 10

Zapište v goniometrickém tvaru číslo

$$z = \left(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi + \frac{1}{\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi}\right)(\cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi).$$

Řešení

Úpravou

$$\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi + \frac{1}{\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi} = \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 1}{\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi} = \frac{2}{\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi}$$

dostáváme pro číslo z:

$$z = \frac{2}{\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi}\cdot(\cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi) = 2\,\frac{\cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi}{\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi} =$$
$$= 2(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

Úlohy

2.11 V goniometrickém tvaru vyjádřete čísla:

a) $\dfrac{1}{\cos\frac{1}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1}{6}\pi}$ b) $\dfrac{\mathrm{i}}{\cos\frac{1}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1}{3}\pi}$

c) $\dfrac{\cos\frac{5}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi}{2\mathrm{i}}$ d) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}$

2.12 V goniometrickém tvaru vyjádřete čísla:

a) $(1-\mathrm{i})\left(\cos\frac{5}{12}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{12}\pi\right)$

b) $\left(\cos\frac{2}{5}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{2}{5}\pi\right)\mathrm{i}$

c) $2\mathrm{i}\sin\frac{1}{4}\pi\left(\cos\frac{7}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{7}{3}\pi\right)\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)$

d) $\dfrac{\cos\frac{5}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi}{1-\mathrm{i}}\cdot\dfrac{1+\mathrm{i}}{\cos\frac{7}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{7}{6}\pi}$

*2.13 Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna komplexní čísla

$$z_k = r_k(\cos\varphi_k + \mathrm{i}\sin\varphi_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

a pro každé přirozené číslo n platí

$$z_1z_2\ldots z_n = r_1r_2\ldots r_n[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + $$
$$+ \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)].$$

2.14 Určete absolutní hodnoty a argumenty komplexních čísel:

a) $\dfrac{1}{\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi}\cdot\dfrac{1}{\cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi}\cdot\ \ldots\ \cdot\dfrac{1}{\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi}$

b) $(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\left(\cos\dfrac{\varphi}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)\ldots\left(\cos\dfrac{\varphi}{2^n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\varphi}{2^n}\right)$

2.15 V goniometrickém tvaru zapište čísla:

a) $\dfrac{\cos\frac{1}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1}{3}\pi}{\cos\frac{1}{6}\pi - \mathrm{i}\sin\frac{1}{6}\pi}$ b) $\dfrac{\mathrm{i}}{\sin\varphi + \mathrm{i}\cos\varphi}$