Stickelbergerova věta pro kruhová tělesa

$m \in \mathbb{N}$, $m > 1$

pro každé $a \in \mathbb{Z}$, $(a,m)=1$

označme $\sigma_a \in Gal(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ určené podmínkou $\sigma_a(\zeta_m) = \zeta_m^a$

Věta Pro libovolný ideál A okruhu $\mathbb{Z}[\zeta_m]$ platí, že A^{Θ_m} je hlavní ideál okruhu $\mathbb{Z}[\zeta_m]$,

kde $\Theta_m = \sum_{\substack{1 \le a < m \\ (a,m)=1}} a\sigma_a^{-1} \in \mathbb{Z}[Gal(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})]$.

Př. $m=3$ … $\mathbb{Q}(\zeta_3) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $Gal(\mathbb{Q}(\zeta_3)/\mathbb{Q}) = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, σ_2 je kompl. konj.

$\theta_3 = \sigma_1 + 2\sigma_2 = 1 + 2\sigma_2$

i norma $N = 1+\sigma_1$ je anihilátor, proto i $2N - \theta_3 = 1$ je anihilátor, tj. $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ je okruh hl. ideálů

Př. $m=4$ … $\mathbb{Q}(\zeta_4) = \mathbb{Q}(i)$, $Gal(\mathbb{Q}(\zeta_4)/\mathbb{Q}) = \{1, \sigma_3\}$, σ_3 je kompl. konj.

$\theta_4 = 1 + 3\sigma_3$, norma $N = 1+\sigma_3$, $3N - \theta_4 = 2$ je anihilátor

1 Gaussovy sumy

p prvočíslo, $q = p^f$, $f \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}_q$ je těleso o q prvcích.

$\chi : \mathbb{F}_q^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ charakter řádu m, tedy $m \mid q-1$.

$\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{C}^\times$

$\psi(x) = \zeta_p^{Tr(x)}$

$g(\chi) = -\sum_{a \in \mathbb{F}_q^\times} \chi(a)\psi(a)$

Lemma 8 (a) $g(\chi) \in \mathbb{Z}[\zeta_{mp}]$

(b) $g(\chi)\cdot\overline{g(\chi)} = \begin{cases} q & \text{pro } \chi \neq 1 \\ 1 & \text{pro } \chi = 1 \end{cases}$

(c) $g(1) = 1$

(d) $g(\chi)^m \in \mathbb{Q}(\zeta_m)$

(e) $g(\chi^p) = g(\chi)$

(f) pro lib. charaktery χ_1, χ_2, jejichž řády dělí m, je $\dfrac{g(\chi_1)\cdot g(\chi_2)}{g(\chi_1\chi_2)} \in \mathbb{Z}[\zeta_m]$

Dk. (a) zřejmé (c) $g(1) = -\sum_{a \in \mathbb{F}_q^\times} \psi(a) = 1 - \sum_{a\in\mathbb{F}_q} \psi(a) = 1$