(b) pro $\chi = 1$ plyne z (c)

nechť $\chi \neq 1$: $\quad g(\chi)\overline{g(\chi)} = \sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times} \chi(a)\psi(a) \sum_{b\in\mathbb{F}_q^\times} \overline{\chi(b)}\,\overline{\psi(b)} = \sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times} \chi(a)\psi(a) \sum_{b\in\mathbb{F}_q^\times} \chi(b^{-1})\psi(-b)$

$$= \sum_{a,b\in\mathbb{F}_q^\times} \chi(ab^{-1})\psi(a-b) \underset{c=ab^{-1}}{=} \sum_{c,b\in\mathbb{F}_q^\times} \chi(c)\psi(cb-b) = \sum_{b\in\mathbb{F}_q^\times} \chi(1)\psi(0) + \sum_{\substack{c,b\in\mathbb{F}_q^\times \\ c\neq 1}} \chi(c)\psi(b(c-1))$$

$$= q-1 + \sum_{\substack{c\in\mathbb{F}_q^\times \\ c\neq 1}} \chi(c)\cdot \underbrace{\sum_{b\in\mathbb{F}_q^\times} \psi(b(c-1))}_{-1} = q-1-\sum_{\substack{c\in\mathbb{F}_q^\times \\ c\neq 1}} \chi(c) = q, \text{ protože } \chi\neq 1.$$

(d) víme, že $g(\chi)\in\mathbb{Q}(\zeta_{mp})$

pro lib $\sigma\in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{mp})/\mathbb{Q}(\zeta_m))$ je $\sigma(\zeta_m)=\zeta_m$, $\sigma(\zeta_p)=\zeta_p^{c}$, $p\nmid c$

pak $\quad \sigma(g(\chi)) = -\sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times} \chi(a)\,\sigma(\psi(a)) = -\sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times} \chi(a)\cdot\psi(a)^c = -\sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times} \chi(a)\cdot\psi(ca) =$

$$\underset{b=ca}{=} -\sum_{b\in\mathbb{F}_q^\times} \chi(bc^{-1})\psi(b) = \chi(c^{-1})\cdot g(\chi)$$

odtud $\sigma(g(\chi)^m) = g(\chi)^m$, proto $g(\chi)^m\in\mathbb{Q}(\zeta_m)$

(e) $a\mapsto a^p$ je automorfismus $\Rightarrow \mathrm{Tr}(a)=\mathrm{Tr}(a^p) \Rightarrow \psi(a)=\psi(a^p)$

$$g(\chi^p) = -\sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times} \chi(a^p)\psi(a^p) = g(\chi)$$

(f) $\quad g(\chi_1)g(\chi_2) = \sum_{a,b\in\mathbb{F}_q^\times} \chi_1(a)\chi_2(b)\psi(a+b) \underset{c=a+b}{=} \sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times} \chi_1(a) \sum_{c\in\mathbb{F}_q-\{a\}} \chi_2(c-a)\psi(c) =$

$$= \sum_{\substack{a,c\in\mathbb{F}_q^\times \\ c\neq a}} \chi_1(a)\chi_2(c-a)\psi(c) + \sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times} \chi_1(a)\chi_2(-a)$$

$\chi_1\chi_2 = 1 \Rightarrow \dfrac{g(\chi_1)\cdot g(\chi_2)}{g(\chi_1\chi_2)} \in \mathbb{Z}[\zeta_{mp}]$, pomocí (d): $\sigma\left(\dfrac{g(\chi_1)g(\chi_2)}{g(\chi_1\chi_2)}\right) = \dfrac{\chi_1(c^{-1})\chi_2(c^{-1})}{\chi_1\chi_2(c^{-1})}\cdot\dfrac{g(\chi_1)g(\chi_2)}{g(\chi_1\chi_2)}$

$\chi_1\chi_2 \neq 1 \Rightarrow \sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times} \chi_1(a)\chi_2(-a) = \chi_2(-1)\sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times} \chi_1\chi_2(a) = 0$

$$\Rightarrow g(\chi_1)g(\chi_2) = \sum_{\substack{a,c\in\mathbb{F}_q^\times \\ c\neq a}} \chi_1(a)\chi_2(c-a)\psi(c) \underset{a=cd}{=} \sum_{\substack{c,d\in\mathbb{F}_q^\times \\ d\neq 1}} \chi_1(cd)\chi_2(c-cd)\psi(c) =$$