$$= \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{F}_q^\times \\ d \neq 1}} \chi_1(c)\, \chi_1(d)\, \chi_2(c)\, \chi_2(1-d)\, \psi(c) = \Big(\sum_{c \in \mathbb{F}_q^\times} \chi_1\chi_2(c)\, \psi(c)\Big) \cdot \Big(\sum_{\substack{d \in \mathbb{F}_q^\times \\ d \neq 1}} \chi_1(d)\chi_2(1-d)\Big) =$$

$$= -g(\chi_1\chi_2) \cdot \underbrace{\sum_{d \in \mathbb{F}_q} \chi_1(d)\, \chi_2(1-d)}_{\in \mathbb{Z}[\zeta_m]}$$

2 Pomocné funkce

Lemma 9 Nechť p je libovolné prvočíslo, $n \in \mathbb{N}$ libovolné. Nechť $F: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ je libovolná funkce splňující

(i) $F(\alpha+\beta) \leq F(\alpha) + F(\beta)$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$

(ii) $F(p a) = F(a)$ pro každé $a \in \mathbb{N}_0$

(iv) $F(1) = 1$, $F(0) = 0$

(iii) $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{p^n-2} F(\alpha) = \frac{(p^n-2)\cdot n\,(p-1)}{2}$

Pak pro libovolné $\alpha \in \{1, \dots, p^n-2\}$ platí $F(\alpha) = (p-1) \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \Big\langle \frac{p^i \alpha}{p^n-1} \Big\rangle$,

kde $\langle x \rangle$ značí necelou část $x \in \mathbb{Q}$, tj. $\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$, neboli $0 \leq \langle x \rangle < 1$, $x - \langle x \rangle \in \mathbb{Z}$.

Proč to děláme:

$\mathbb{Q}(\zeta_{mp})$ P $P \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$

|

$\mathbb{Q}(\zeta_m)$ $\mathfrak{p}$ $P \cap \mathbb{Z}[\zeta_m] = \mathfrak{p}$

|

$\mathbb{Q}$ p