Pro libovolné $a \in \mathbb{N}$, $(a,m)=1$ označme $\sigma_a \in Gal(\mathbb{Q}(\zeta_{mp})/\mathbb{Q}(\zeta_p))$ automorfismus daný předpisem $\sigma_a(\zeta_m)=\zeta_m^a$ (tedy $\sigma_a(\zeta_p)=\zeta_p$).

Pak

$$\nu_{\mathfrak{p}^{\sigma_a^{-1}}}(g(\chi)) = \nu_{\mathfrak{p}}(g(\chi)^{\sigma_a}) = \nu_{\mathfrak{p}}(g(\chi^a)),$$

neboť

$$g(\chi)^{\sigma_a} = \Big(-\sum_{b\in\mathbb{F}_q^\times}\chi(b)\psi(b)\Big)^{\sigma_a} = -\sum_{b\in\mathbb{F}_q^\times}(\chi(b))^a\cdot\psi(b) = g(\chi^a).$$

Pro libovolné $a \in \mathbb{N}_0$ definujme

$$G(a) = \nu_{\mathfrak{p}}(g(\chi^a))$$

Odtud $G(0)=0$ podle L8 (c), $G(a+b) \le G(a)\cdot G(b)$ pro každé $a,b\in\mathbb{N}_0$ podle L8(e). podle L8 (f), $G(pa)=G(a)$ pro každé $a\in\mathbb{N}_0$

Dále platí

$$\Big(\prod_{a=1}^{q-2} g(\chi^a)\Big)^2 = \prod_{a=1}^{q-2} g(\chi^a)\cdot\prod_{a=1}^{q-2} g(\chi^{q-1-a}) \underset{m\mid q-1}{=} \prod_{a=1}^{q-2}\big(g(\chi^a)\cdot g(\chi^{-a})\big) =$$

$$= \prod_{a=1}^{q-2}\big(g(\chi^a)\cdot g(\overline{\chi^a})\big)$$

$$\overline{g(\chi^a)} = -\sum_{b\in\mathbb{F}_q^\times}\overline{\chi^a}(b)\cdot\overline{\psi}(b) = -\sum_{b\in\mathbb{F}_q^\times}\overline{\chi^a}(b)\cdot\psi(-b) = -\overline{\chi^a}(-1)\cdot\sum_{b\in\mathbb{F}_q^\times}\overline{\chi^a}(-b)\psi(-b) =$$

$$= \overline{\chi^a}(-1)\cdot g(\chi^a)$$

Odtud užitím L8 (b)

$$g(\chi^a)\cdot g(\overline{\chi^a}) = \begin{cases}\chi^a(-1) & \text{je-li } \chi^a \text{ triviální}\\ \chi^a(-1)\cdot q & \text{je-li } \chi^a \text{ netriviální}\end{cases}$$

Přidáme-li předpoklad $m=q-1$ (to je tedy pouze speciální případ):

$$\Big(\prod_{a=1}^{q-2} g(\chi^a)\Big)^2 = \prod_{a=1}^{q-2}\big((\chi(-1))^a\cdot q\big) = \pm q^{q-2}$$

Odtud

$$\sum_{a=1}^{q-2} G(a) = \frac{1}{2}\nu_{\mathfrak{p}}(q^{q-2}) = \frac{1}{2}(q-2)\cdot\nu_{\mathfrak{p}}(q) = (q-2)\cdot f\cdot(p-1)$$