Formulujme znovu dokazovanou větu

<u>VĚTA</u> Nechť $m > 1$, $m \not\equiv 2 \pmod 4$. Nechť A je libovolný (lomený) ideál tělesa $\mathbb{Q}_m = \mathbb{Q}(\zeta_m)$. Pak $A^{m\Theta_m}$ je hlavní (lomený) ideál, kde

$$\Theta_m = \sum_{\substack{1 \le t < m \\ (t,m)=1}} \frac{t}{m} \sigma_t^{-1} \in \mathbb{Q}[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_m/\mathbb{Q})].$$

Minule jsme ukázali, že

$$g(\chi)\,\mathbb{Z}[\zeta_{mp}] = \mathcal{P}^{(p-1)\Theta_m},$$

a proto

$$(g(\chi))^m\,\mathbb{Z}[\zeta_{mp}] = \mathcal{P}^{(p-1)m\Theta_m} = (p\,\mathbb{Z}[\zeta_{mp}])^{m\Theta_m},$$

a protože $g(\chi)^m \in \mathbb{Z}[\zeta_m]$, dostáváme

$$(g(\chi))^m\,\mathbb{Z}[\zeta_m] = p^{m\Theta_m}.$$

Obecněji: pro libovolné $c \in \mathbb{Z}$, $(c,m)=1$, označme $\beta = c - \sigma_c \in \mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_m/\mathbb{Q})]$.

Pak platí

$$\beta \cdot \Theta_m \in \mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_m/\mathbb{Q})] \quad \text{a} \quad g(\chi)^\beta \in \mathbb{Q}_m.$$

Pak dostaneme

$$(g(\chi))^\beta\,\mathbb{Z}[\zeta_m] = p^{\beta\Theta_m}.$$

Ukázali jsme, že prvek $m\Theta_m$ anihiluje všechny třídy obsahující prvoideály, které jsou nerozvětvené v $\mathbb{Q}_m/\mathbb{Q}$ (tj. nedělí m).

Máme 2 možnosti:

1) Užijeme Čebotarevovu větu o hustotě, podle které v každé třídě existuje nekonečně mnoho takových nerozvětvených prvoideálů.
2) Využijeme toho, že větvících se prvoideálů je konečně mnoho; pro libovolný lomený ideál A existuje $\alpha \in \mathbb{Q}_m$ mající v těchto prvoideálech opačné valuace, pak αA je nesoudělný s větvícími se prvoideály. Podle odvozeného je $(\alpha A)^{m\Theta_m}$ hlavní; ovšem $\alpha^{m\Theta_m}\mathbb{Z}[\zeta_m]$ je hlavní, proto i $A^{m\Theta_m}$ je hlavní.

Věta je dokázána.