Domácí úkol z 10. října 2019

Pro libovolné přirozené číslo r nechť $\zeta_r = e^{2\pi i/r}$ a nechť $\mathbb{Q}_r = \mathbb{Q}(\zeta_r)$ značí r-té kruhové těleso. Připomeňme, že pro libovolné prvočíslo $p \nmid r$ je Frobeniův automorfismus Fr_p tím automorfismem tělesa $\mathbb{Q}_r$, který je určený podmínkou $\mathrm{Fr}_p(\zeta_r) = \zeta_r^p$; toto označení se užívá i pro restrikci tohoto automorfismu na libovolné podtěleso tělesa $\mathbb{Q}_r$.

Nechť K je abelovské těleso konduktoru m. Grupu kruhových čísel tělesa K definujme předpisem

$$D_{\mathrm{S}}(K) = \langle \{-1\} \cap \{\mathrm{N}_{\mathbb{Q}_r/\mathbb{Q}_r\cap K}(1-\zeta_r^a);\ r \mid m,\, 1 \le a < r\}\rangle,$$

kde $\langle \dots \rangle$ značí podgrupu multiplikativní grupy $(K^\times, .)$ tělesa K generovanou příslušnou množinou. Sinnottova grupa kruhových jednotek tělesa K je pak průnik této grupy s grupou všech jednotek okruhu celých algebraických čísel tělesa K:

$$C_{\mathrm{S}}(K) = D_{\mathrm{S}}(K) \cap \mathcal{O}_K^\times.$$

1. Pro libovolné celé číslo $r \mid m$, $r > 1$, označme

$$\eta_r = \mathrm{N}_{\mathbb{Q}_r/\mathbb{Q}_r\cap K}(1-\zeta_r).$$

   Nechť přirozené číslo $r \mid m$ a prvočíslo $p \mid \frac{m}{r}$. Dokažte, že

$$\mathrm{N}_{\mathbb{Q}_{pr}\cap K/\mathbb{Q}_r\cap K}(\eta_{pr}) = \begin{cases} \eta_r^{1-\mathrm{Fr}_p^{-1}} & \text{jestliže } p \nmid r > 1,\\ \eta_r & \text{jestliže } p \mid r > 1,\\ p & \text{jestliže } r = 1.\end{cases}$$

2. Nechť $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ je Galoisova grupa tělesa K. Dokažte, že jako $\mathbb{Z}[G]$-modul je grupa kruhových čísel tělesa K generována množinou

$$\{-1\} \cap \{\eta_r;\ 1 < r \mid m, (r, \tfrac{m}{r}) = 1\}.$$

[Při důkaze první části je možné využít relaci normy uvedenou na str. 28 úvodní přednášky, kterou dokážete pomocí rovnosti (3) odvozené na str. 20 tamtéž (soubor pdf je uložen v učebních materiálech v ISu). Pro důkaz druhé části je první část užitečná.]