

Domácí úkol z 28. listopadu 2019

Dokažte následující tvrzení, které jsme na semináři dokázali jen ve speciálním případě:

Tvrzení. Bud' M libovolné abelovské těleso konduktoru m . Pak

$$\text{res}_{\mathbb{Q}_m/M} m\theta_m$$

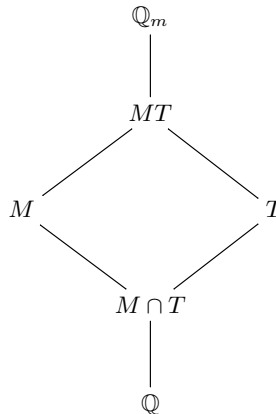
je anihilátor grupy tříd ideálů tělesa M . Zde \mathbb{Q}_m značí m -té kruhové těleso a

$$\theta_m = \sum_{\substack{1 \leq t < m \\ (t,m)=1}} \frac{t}{m} \sigma_t^{-1} \in \mathbb{Q}[\text{Gal}(\mathbb{Q}_m/\mathbb{Q})],$$

kde $\sigma_t \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_m/\mathbb{Q})$ značí automorfismus určený podmínkou $\sigma_t(\zeta_m) = \zeta_m^t$.

[Při důkaze je možné postupovat takto:

- Podobně jako v případě $M = \mathbb{Q}_m$ vysvětlete, že stačí dokázat, že pro každý prvoideál \mathfrak{p} tělesa M , který neobsahuje m (a tedy se nevětví ani v \mathbb{Q}_m/M ani v M/\mathbb{Q}), platí, že $\mathfrak{p}^{m\theta_m}$ je hlavní ideál.
- Zvolme libovolně prvoideál \mathfrak{p} tělesa M , který neobsahuje m . Označme p prvočíslo obsažené v \mathfrak{p} a zvolme prvoideál \mathfrak{P} tělesa \mathbb{Q}_m , který dělí \mathfrak{p} . Označme T dekompoziční podtěleso tělesa \mathbb{Q}_m pro prvočíslo p . (Tedy T je určené podmínkou $\text{Gal}(\mathbb{Q}_m/T) = \langle \sigma_p \rangle$ a platí, že se prvočíslo p v rozšíření T/\mathbb{Q} zcela rozkládá na součin $[T : \mathbb{Q}]$ konjugovaných prvoideálů, zatímco každý z těchto prvoideálů je inertní v rozšíření \mathbb{Q}_m/T .) Necht' s je nejmenší přirozené číslo splňující $m \mid p^s - 1$ a necht' χ je $-\frac{p^s-1}{m}$ -tá mocnina Teichmüllerova charakteru pro prvočíslo p . Na semináři jsme ukázali, že $g(\chi)^m \in \mathbb{Q}_m$ a že $g(\chi^p) = g(\chi)$ (viz lemma 8). Odvod'te odtud, že $g(\chi)^m \in T$. Pomocí diagramu



vysvětlete, proč se prvoideál \mathfrak{p} v rozšíření MT/M zcela rozkládá na součin $[MT : M]$ konjugovaných prvoideálů, zatímco každý z těchto prvoideálů je inertní v rozšíření \mathbb{Q}_m/MT . Z věty dokázané v semináři pro těleso \mathbb{Q}_m odvod'te, že

$$g(\chi)^m \mathcal{O}_{MT} = (\mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_{MT})^{\text{res}_{\mathbb{Q}_m/MT} m\theta_m},$$

a vysvětlete, že odtud plyne

$$N_{MT/M}(g(\chi)^m) \mathcal{O}_M = \mathfrak{p}^{\text{res}_{\mathbb{Q}_m/M} m\theta_m},$$

čímž je tvrzení dokázáno.]