Téma 10: Parametrické úlohy o dvou nezávislých náhodných výběrech z normálních rozložení a jednom náhodném výběru z alternativního rozložení

Úkol 1.: Intervaly spolehlivosti pro parametrické funkce μ_1-μ_2, σ_1^2/σ_2^2

Bylo vylosováno 11 stejně starých selat téhož plemene. Šesti z nich byla předepsána výkrmná dieta č. 1 a zbylým pěti výkrmná dieta č. 2. Průměrné denní přírůstky v Dg za dobu půl roku jsou následující:

dieta č. 1: 62, 54, 55, 60, 53, 58
dieta č. 2: 52, 56, 49, 50, 51.

Zjištěné hodnoty považujeme za realizace dvou nezávislých náhodných výběrů pocházejících z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.
a) Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro podíl rozptylů.
b) Za předpokladu, že data pocházejí z rozložení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a $N(\mu_2, \sigma^2)$, sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot μ_1 - μ_2.

Návod:
Načteme datový soubor dve_diety.sta o 2 proměnných hmotnost a dieta a 11 případech. Pomocí Popisných statistik zjistíme realizace výběrových průměrů, výběrových rozptylů a výběrových směrodatných odchylek.

Pro první dietu:

	Popisné statistiky (Tabulka1) Zhrnout podmínku: v2=1			
Proměnná	N platných	Průměr	Rozptyl	Sm.odch.
hmotnost	6	57,00000	12,80000	3,577709

Pro druhou dietu:

	Popisné statistiky (Tabulka1) Zhrnout podmínku: v2=2			
Proměnná	N platných	Průměr	Rozptyl	Sm.odch.
hmotnost	5	51,60000	7,300000	2,701851

ad a)
Meze 100(1-α)% empirického intervalu spolehlivosti pro podíl rozptylů jsou:

$$(d, h) = \left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} \right).$$

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných d a h a jednom případu.
Do Dlouhého jména proměnné d napíšeme
=(12,8/7,3)/VF(0,975;5;4)
(Funkce VF(x;ný;omega) počítá x-kvantil Fisherova – Snedecorova rozložení F(ný, omega).)
Do Dlouhého jména proměnné h napíšeme
=(12,8/7,3)/VF(0,025;5;4)

	1 d	2 h
1	0,187242	12,9541

S pravděpodobností aspoň 0,95 tedy platí: $0{,}1872 < \sigma_1^2/\sigma_2^2 < 12{,}954$.

ad b) Meze 100(1-α)% empirického intervalu spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot (v případě, že rozptyly neznáme, ale víme, že jsou shodné) můžeme ve STATISTICE vypočítat pomocí dvouvýběrového t-testu:
Statistika – Základní statistiky a tabulky – t-test, nezávislé, dle skupin – OK, Proměnné – Závislé proměnné hmotnost, Grupovací proměnná dieta – OK. Na záložce Možnosti zaškrtneme Meze spol. pro odhady – Výpočet. Zajímají nás poslední dva sloupce ve výstupní tabulce.

Proměnná	Int. spolehl. -95,000%	Int. spolehl. +95,000%
hmotnost	0,991963	9,808037

S pravděpodobností aspoň 0,95 tedy $0{,}99$ Dg $< \mu_1 - \mu_2 < 9{,}81$ Dg.

Úkol k samostatnému řešení: Jsou dány dva nezávislé náhodné výběry o rozsazích $n_1 = 25$, $n_2 = 10$, první pochází z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, druhý z rozložení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, kde parametry μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2 neznáme. Byly vypočteny realizace výběrových rozptylů: $s_1^2 = 1{,}7482$, $s_2^2 = 1{,}7121$. Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro podíl rozptylů.
Výsledek:
$0{,}28 < \sigma_1^2/\sigma_2^2 < 2{,}76$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

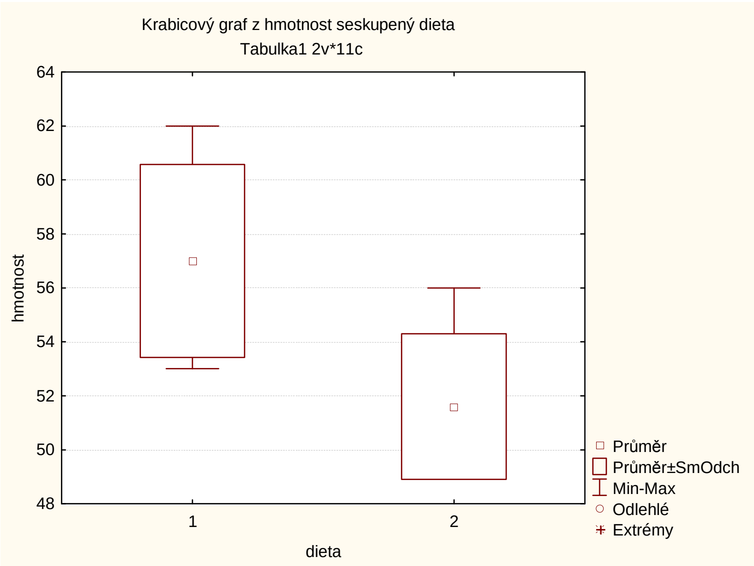
Úkol 2.: Testování hypotéz o parametrických funkcích $\mu_1-\mu_2$, $\sigma_1^2/\sigma_2^{\,2}$
Pro datový soubor z úkolu 2 testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že
a) rozptyly hmotnostních přírůstků selat při obou výkrmných dietách jsou shodné
b) obě výkrmné diety mají stejný vliv na hmotnostní přírůstky selat.

Návod:
Provedeme dvouvýběrový t-test současně s testem o shodě rozptylů:
Statistika – Základní statistiky a tabulky – t-test, nezávislé, dle skupin – OK, Proměnné – Závislé proměnné hmotnost, Grupovací proměnná dieta – OK.

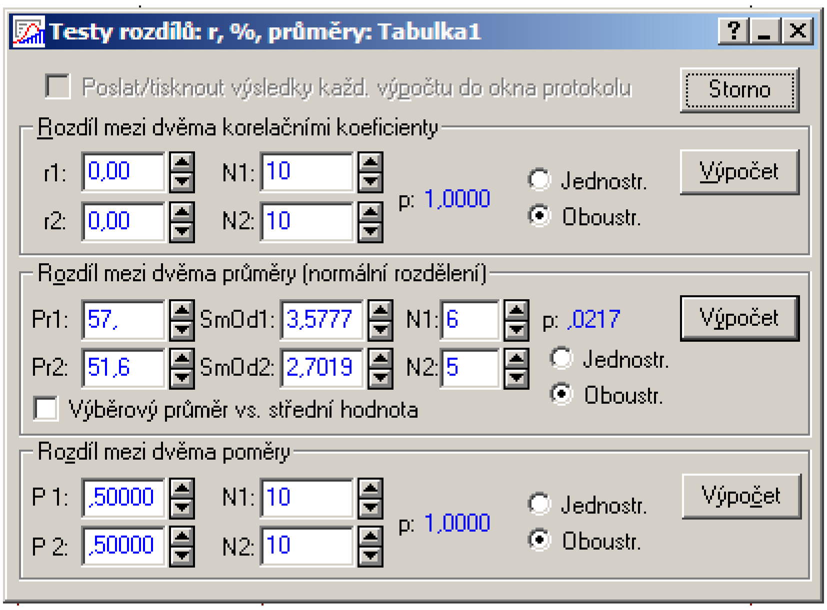
	t-testy; grupováno: dieta (Tabulka1) Skup. 1: 1 Skup. 2: 2										
Proměnná	Průměr 1	Průměr 2	t	sv	p	Poč.plat 1	Poč.plat. 2	Sm.odch. 1	Sm.odch. 2	F-poměr Rozptyly	p Rozptyly
hmotnost	57,00000	51,60000	2,771222	9	0,021710	6	5	3,577709	2,701851	1,753425	0,606345

Testová statistika pro test shody rozptylů se realizuje hodnotou 1,7534, odpovídající p-hodnota je 0,6063, tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o shodě rozptylů. (Upozornění: v případě zamítnutí hypotézy o shodě rozptylů je zapotřebí v tabulce t-testu pro nezávislé vzorky dle skupin zaškrtnout volbu Test se samostatnými odhady rozptylu.)
Dále z tabulky plyne, že testová statistika pro test shody středních hodnot se realizuje hodnotou 2,7712, počet stupňů volnosti je 9, odpovídající p-hodnota 0,0217, tedy hypotézu o shodě středních hodnot zamítáme na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že s rizikem omylu nejvýše 5 % se prokázalo, že obě výkrmné diety se liší účinností.

Tabulku ještě doplníme krabicovými diagramy. Na záložce Detaily zaškrtneme krabicový graf a vybereme volbu Průměr/SmOdch/Min-Max.



Upozornění: Dvouvýběrový t-test lze v systému STATISTICA provést ještě jiným způsobem, který je vhodný zvláště tehdy, známe-li realizace výběrových průměrů a výběrových směrodatných odchylek.
Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení) – do políčka Pr1 napíšeme 57, do políčka SmOd1 napíšeme 3,5777, do políčka N1 napíšeme 6, do políčka Pr2 napíšeme 51,6, do políčka SmOd1 napíšeme 2,7019, do políčka N1 napíšeme 5 - Výpočet.



Dostaneme p-hodnotu 0,0217, tedy zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.

Úkol k samostatnému řešení: Do systému STATISTICA načtěte datový soubor vyska.sta, který obsahuje údaje o výšce 48 studentek VŠE v Praze (proměnná vyska) a obor jejich studia (1 – národní hospodářství, 2 – informatika).

a) Pomocí S-W testu ověřte na hladině významnosti 0,1 předpoklad o normalitě výšek v obou skupinách studentek
b) Na hladině významnosti 0,1 testujte hypotézu o shodě rozptylů výšek studentek v daných dvou oborech studia.
c) Na hladině významnosti 0,1 testujte hypotézu o shodě středních hodnot výšek studentek v daných dvou oborech studia.
Výpočet doplňte krabicovými diagramy.

Výsledek:

ad a) p-hodnota S-W testu pro studentky oboru nh je 0,6068 a pro studentky oboru informatika je 0,1119, tedy na hladině významnosti 0,1 hypotézu o normalitě nezamítáme ani v jednom případě.
ad b) Protože p-hodnota F-testu je 0,1249, což je větší než hladina významnosti 0,1, nulovou hypotézu o shodě rozptylů nezamítáme na hladině významnosti 0,1.
ad c) Protože p-hodnota dvouvýběrového t-testu je 0,0878, což je menší než hladina významnosti 0,1, nulovou hypotézu o shodě středních hodnot zamítáme na hladině významnosti 0,1.

Úkol 3.: Asymptotický interval spolehlivosti pro parametr ϑ alternativního rozložení

Může politická strana, pro niž se v předvolebním průzkumu vyslovilo 60 z 1000 dotázaných osob, očekávat se spolehlivostí 0,95, že by v této době ve volbách překročila 5% hranici pro vstup do parlamentu?

Návod: Zavedeme náhodné veličiny $X_1, ..., X_{1000}$, přičemž $X_i = 1$, když i-tá osoba se vysloví pro danou politickou stranu a $X_i = 0$ jinak, i = 1, ..., 1000. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$. V tomto případě n = 1000, m = 60/1000 = 0,06, α = 0,05, $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,645$.
Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: parametr ϑ neznáme, musíme ho nahradit výběrovým průměrem. Pak 1000.0,06.0,94 = 56,4 > 9.
95% levostranný interval spolehlivosti pro ϑ je

$$\left(m-\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha}\ ;\ \infty\right)=\left(0,06-\sqrt{\frac{0,06(1-0,06)}{1000}}u_{0,95}\ ;\ \infty\right).$$ V našem případě

$$d = 0,06-\sqrt{\frac{0,06\cdot 0,94}{1000}}\cdot 1,645 = 0,0476$$

S pravděpodobností přibližně 0,95 tedy $\vartheta > 0,048$. Protože tento interval zahrnuje i hodnoty nižší než 0,05, nelze vyloučit, že strana získá méně než 5 % hlasů.

Postup ve STATISTICE:

Statistiky – Analýza síly testu – Odhad intervalu – Jeden podíl, Z, Chí-kvadrát test – OK – Pozorovaný podíl p: 0,06, Velikost vzorku: 1000, Spolehlivost: 0,9 – Vypočítat.

Dostaneme tabulku:

	Hodnota
Podíl vzorku p	0,0600
Velikost vz. ve skup. (N)	1000,0000
Interval spolehlivosti	0,9000
Meze spolehlivosti:	
Pí (přesně):	
Dolní mez	0,0481
Horní mez	0,0738
Pí (přibližně):	
Dolní mez	0,0483
Horní mez	0,0741
Pí (původ.):	
Dolní mez	0,0476
Horní mez	0,0724

Zajímá nás výsledek uvedený v dolní části tabulky, tj. Pí (původ.).
Protože dolní mez oboustranného 90% intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ je shodná s dolní mezí 95% levostranného intervalu spolehlivosti, můžeme konstatovat, že voliči budou volit danou politickou stranu s pravděpodobností aspoň 4,76 %. Na základě uvedených dat strana tedy nemá zaručeno, že překročí 5% hranici pro vstup do parlamentu.

Úkol k samostatnému řešení: Přírůstky cen akcií na burze (v %) u 10 náhodně vybraných společností dosáhly těchto hodnot: 10, 16, 5, 10, 12, 8, 4, 6, 5, 4. Sestrojte 95% asymptotický empirický interval spolehlivosti pro pravděpodobnost, že přírůstek ceny akcie překročí 8,5 %.
Výsledek: $0{,}096 < \vartheta < 0{,}704$ s pravděpodobností aspoň 0,95.
Znamená to, že pravděpodobnost, že přírůstek ceny akcie překročí 8,5 %, je aspoň 9,6 % a nanejvýš 70,4 % (při spolehlivosti 95%.)

Úkol 4.: Testování hypotézy o parametru ϑ alternativního rozložení
Určitá cestovní kancelář organizuje zahraniční zájezdy podle individuálních přání zákazníků. Z několika minulých let ví, že 30 % všech takto organizovaných zájezdů má za cíl zemi X. Po zhoršení politických podmínek v této zemi se cestovní kancelář obává, že se zájem o tuto zemi mezi zákazníky sníží. Ze 150 náhodně vybraných zákazníků v tomto roce má 38 za cíl právě zemi X. Potvrzují nejnovější data pokles zájmu o tuto zemi? Volte hladinu významnosti 0,05.
Návod: Máme náhodný výběr $X_1, ..., X_{150}$ z rozložení A(0,3). Testujeme H_0: $\vartheta = 0{,}3$ proti levostranné alternativě H_1: $\vartheta < 0{,}3$. Testovým kritériem je statistika $T_0 = \dfrac{M - c}{\sqrt{\dfrac{c(1-c)}{n}}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení N(0,1). Musíme ověřit splnění podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: 150.0,3.0,7 = 31,5 > 9. Vypočteme realizaci testového kritéria:
$t_0 = \dfrac{m - c}{\sqrt{\dfrac{c(1-c)}{n}}} = \dfrac{\frac{38}{150} - 0{,}3}{\sqrt{\dfrac{0{,}3(1-0{,}3)}{150}}} = -1{,}24722$. Kritický obor: $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha}\right\rangle =$ $\left(-\infty, -1{,}645\right\rangle$. Protože testové kritérium nepatří do kritického oboru, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Postup ve STATISTICE:
Test provedeme pomocí 95% pravostranného intervalu spolehlivosti, který vypočítáme v modulu Analýza síly testu.
Statistiky – Analýza síly testu – Odhad intervalu – Jeden podíl, Z, Chí-kvadrát test – OK – Pozorovaný podíl p: 0,2533, Velikost vzorku: 150, Spolehlivost: 0,9 – Vypočítat.

Dostaneme tabulku:

	Hodnota
Podíl vzorku p	0,2533
Velikost vz. ve skup. (N)	150,0000
Interval spolehlivosti	0,9000
Meze spolehlivosti:	
Pí (přesně):	
Dolní mez	0,1957
Horní mez	0,3185
Pí (přibližně):	
Dolní mez	0,1966
Horní mez	0,3193
Pí (původ.):	
Dolní mez	0,1949
Horní mez	0,3117

Zajímá nás výsledek uvedený v dolní části tabulky, tj. Pí (původ.).
Protože horní mez oboustranného 90% intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ je shodná s horní mezí 95% pravostranného intervalu spolehlivosti, vidíme, že $0{,}3 \in (0;0{,}3117)$, tudíž nelze na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu, že zájem o danou zemi se nezměnil.