Téma 6.: Normální rozložení, kvantity spojitých náhodných veličin

Normální rozložení N(μ, σ^2)

Náhodná veličina X ~ N(μ, σ^2) má hustotu $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Pro $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ se jedná o standardizované normální rozložení, píšeme U ~ N(0, 1).

Hustota pravděpodobnosti má v tomto případě tvar $\varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Kreslení grafů funkcí $\varphi(x)$ a $\Phi(x)$ rozložení N(μ, σ^2) **v systému STATISTICA pomocí Pravděpodobnostního kalkulátoru**
Statistiky – Pravděpodobnostní kalkulátor – Rozdělení – Z (normální). Vyplníme průměr: μ, SmOdch: σ, zaškrtneme Vytv. graf – Výpočet.

Příklad 1.: Životnost baterie v hodinách je náhodná veličina, která má normální rozložení se střední hodnotou 300 hodin a směrodatnou odchylkou 35 hodin. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná baterie bude mít životnost
a) aspoň 320 hodin?
b) nejvýše 310 hodin?
Návod na výpočet pomocí systému STATISTICA:
1. možnost: Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných a jednom případu. Do Dlouhého jména 1. proměnné napíšeme
=1-INormal(320;300;35). Dostaneme výsledek 0,2839. Do Dlouhého jména 2. proměnné napíšeme =INormal(310;300;35). Dostaneme výsledek 0,6125.
2. možnost: Statistiky – Pravděpodobnostní kalkulátor. Ve volbě Rozdělení vybereme Z (Normální), do okénka průměr napíšeme 320 a do okénka Sm. Odch. napíšeme 35.
Ad a) Do okénka označeného X napíšeme 320, zaškrtneme 1-kumul. p a po kliknutí na Výpočet se v okénku p objeví hodnota 0,2839.
Ad b) Do okénka označeného X napíšeme 310, odškrtneme 1-kumul. p a po kliknutí na Výpočet se v okénku p objeví hodnota 0,6125.

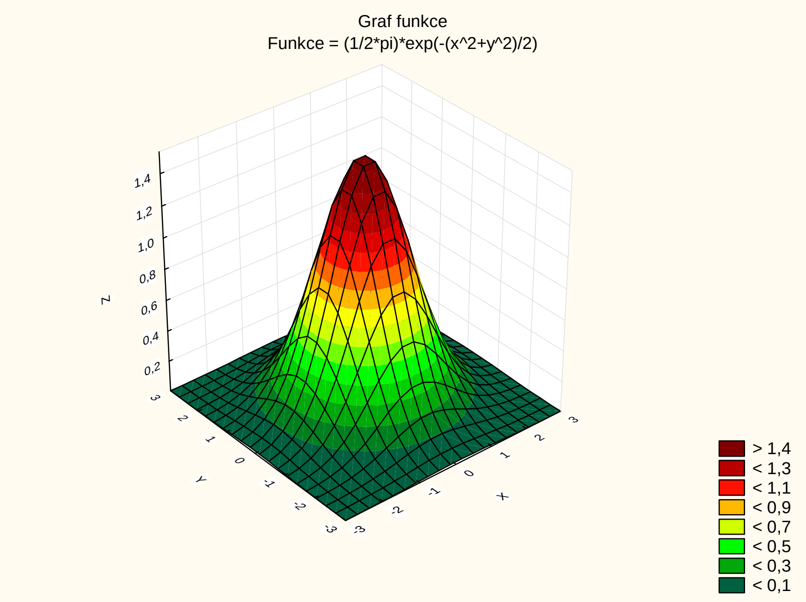
Příklad 2.: Automat na kávu je seřízen tak, že plní šálky po 200 ml kávy se směrodatnou odchylkou 15 ml. Předpokládáme, že množství kávy v šálku se řídí normálním rozložením.
Kolik procent šálků bude obsahovat méně než 224 ml kávy?
Kolik procent šálků bude obsahovat mezi 191 ml až 209 ml kávy?
Automat používá šálky o objemu 230 ml. Kolik šálků z tisíce naplněných pravděpodobně přeteče?
Výsledky:
Ad a) Asi 94,5% šálků bude obsahovat méně než 224 ml kávy.
Ad b) Asi 45,1% šálků bude obsahovat mezi 191 ml až 209 ml kávy.
Ad c) Z tisíce šálků jich pravděpodobně přeteče 2,27.

Příklad 3.: Je známo, že rozložení IQ v populaci je normální se střední hodnotou 100 bodů a směrodatnou odchylkou 15 bodů. Jedinec, který má IQ nad 130 bodů, je vysoce inteligentní. Jaká je pravděpodobnost, že z populace náhodně vybereme vysoce inteligentního jedince?
Výsledek: Hledaná pravděpodobnost je 0,02275

Kreslení grafu hustoty dvourozměrného standardizovaného normálního rozložení

Tato hustota je dána předpisem $\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}$.

Grafy – 3D XYZ – Grafy vlastních funkcí – nastavíme rozsahy os: osa X: -3;3, osa Y: -3;3 – do pole Funkce Z(x,y) napíšeme: (1/2*pi)*exp(-(x^2+y^2)/2) – OK.
Dostaneme graf:



Výpočet kvantilů normálního, Pearsonova, Studentova a F-S rozložení

Příklad 4.: Nechť X ~ N(3, 5). Najděte dolní kvartil.
Návod na výpočet pomocí systému STATISTICA:
1. možnost: Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu.
Do dlouhého jména této proměnné napíšeme =VNormal(0,25;3;sqrt(5)). Dostaneme 1,491795.
2. možnost: Statistiky – Pravděpodobnostní kalkulátor. Ve volbě Rozdělení vybereme Z (Normální), do okénka průměr napíšeme 3, do okénka Sm. Odch. napíšeme 2,236, do okénka p napíšeme 0,25 a v okénku X se objeví 1,4918.

Příklad 5.: Nechť U ~ N(0, 1). Najděte kvantily $u_{0,90}$, $u_{0,95}$, $u_{0,975}$, $u_{0,99}$, $u_{0,995}$
Výsledky: $u_{0,90}$ = 1,281552, $u_{0,95}$ = 1,644854, $u_{0,975}$ = 1,959964, $u_{0,99}$ = 2,326348, $u_{0,995}$ = 2,575829

Příklad 6.: Určete $\chi^2_{0,025}(25)$.
Návod na výpočet pomocí systému STATISTICA:
1. možnost: Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu.
Do dlouhého jména této proměnné napíšeme =VChi2(0,025;25). Dostaneme 13,1197.
2. možnost: Statistiky – Pravděpodobnostní kalkulátor. Ve volbě Rozdělení vybereme Chi2. Do okénka sv. napíšeme 25 a do okénka p napíšeme 0,025. V okénku Chi 2 se objeví 13,11972.

Příklad 7.: Určete $t_{0,99}(30)$ a $t_{0,05}(14)$.
Návod na výpočet pomocí systému STATISTICA:
1. možnost: Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu.

Do dlouhého jména této proměnné napíšeme =VStudent(0,99;30) (resp. VStudent(0,05;14)). Dostaneme 2,457262 (resp. -1,76131).
2. možnost: Statistiky – Pravděpodobnostní kalkulátor. Ve volbě Rozdělení vybereme t (Studentovo). Do okénka sv. napíšeme 30 (resp. 14) a do okénka p napíšeme 0,99 (resp. 0,05). V okénku t se objeví 2,457262 (resp. -1,761310).

Příklad 8.: Určete $F_{0,975}(5, 20)$ a $F_{0,05}(2, 10)$.
Návod na výpočet pomocí systému STATISTICA:
1. možnost: Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a dvou případech
Do dlouhého jména první proměnné napíšeme =VF(0,975;5;20), do dlouhého jména druhé proměnné napíšeme =VF(0,05;2;10).Dostaneme 3,2891 (resp. 0,05156).
2. možnost: Statistiky – Pravděpodobnostní kalkulátor. Ve volbě Rozdělení vybereme F (Fisherovo). Do okénka sv1 napíšeme 5 (resp. 2), do okénka sv2 napíšeme 20 (resp. 10) a do okénka p napíšeme 0,975 (resp. 0,05). V okénku F se objeví 3,289056 (resp. 0,05156).