4 Diskrétní a spojité náhodné veličiny

4.1 Binomické rozdělení $\mathrm{Bin}(N, p)$

- Bernoulliho pokusy $X_1, \ldots, X_N$:
  - $X_i = 1$ ... událost nastala; $X_i = 0$... událost nenastala; $i = 1, \ldots, N$.
  - $\Pr(X_i = 1) = p$
  - $\Pr(X_i = 0) = 1 - p = q$
- Binomické rozdělení:
  - X... počet událostí v posloupnosti N nezávislých Bernoulliho pokusů, přičemž pravděpodobnost nastání události v každém pokusu je vyjádřena parametrem p.
  - $\sum_{i=1}^{N} X_i = X \sim \mathrm{Bin}(N, p)$.
  - $\boldsymbol{\theta} = (N, p)$
  - pravděpodobnostní funkce:

$$p(x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, N;$$

  - vlastnosti: $\mathrm{E}[X] = Np$; $\mathrm{Var}[X] = Np(1-p)$
  - dbinom(x, N, p), pbinom(x, N, p)

Dataset 1: Počet chlapců v rodinách s 12 dětmi

V rámci studie poměru pohlaví u lidí z roku 1889 bylo na základě záznamů z nemocnic v Sasku zaznamenáno rozdělení počtu chlapců v čtrnáctičlenných rodinách. Mezi $M = 6115$ rodinami s $N = 12$ dětmi byla pozorována početnost chlapců. Údaje ze studie jsou uvedeny v následující tabulce.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
$m_{observed}$	3	24	104	286	670	1033	1343	1112	829	478	181	45	7	6115

Příklad 4.1. Výpočet parametru p binomického modelu
Vezměte údaje z datasetu 1. Předpokládejme, že náhodná veličina X popisující počet chlapců v rodinách s dvanácti dětmi pochází z binomického rozdělení s parametrem $N = 12$. Vypočítejte odhad pravděpodobnosti výskytu chlapců v rodinách s dvanácti dětmi.

Řešení příkladu 4.1
Pravděpodobnost p výskytu chlapců v rodinách s dvanácti dětmi odhadneme pomocí vzorce

$$\widehat{p} = \frac{\text{počet narozených chlapců}}{\text{celkový počet narozených dětí}} = \frac{\sum_{n=0}^{N} n m_{observed}}{NM}. \tag{1}$$

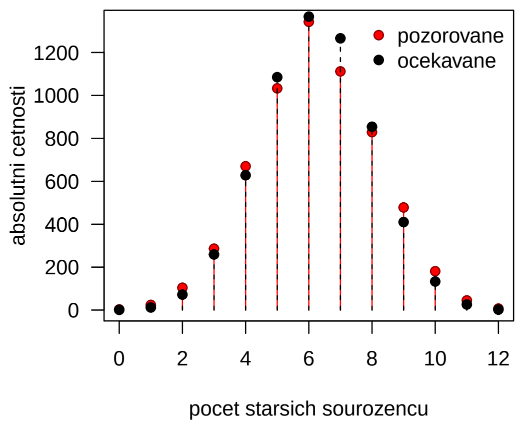
```
[1] 0.5192
```
1

Interpretace výsledků: Pravděpodobnost výskytu chlapců v rodinách s dvanácti dětmi je .... (.............................. %).

Příklad 4.2. Pozorované a očekávané početnosti v binomickém modelu
Za předpokladu, že počet chlapců v rodinách s dvanácti dětmi pochází z binomického rozdělení s parametry $N =$ .... a $p =$ .... odhadněte očekávané početnosti chlapců v rodinách s dvanácti dětmi a porovnejte je s pozorovanými početnostmi.

Řešení příkladu 4.2

```
      0  1   2   3   4    5    6    7   8   9  10  11  12        2
m.obs 3 24 104 286 670 1033 1343 1112 829 478 181 45   7         3
m.exp 1 12  72 259 628 1085 1367 1266 854 410 133 26   2         4
```



Obrázek 1: Porovnání pozorovaných a očekávaných početností v Poissonově modelu

Příklad 4.3. Výpočet pravděpodobností za předpokladu binomického modelu
Za předpokladu, že náhodná veličina X popisující počet chlapců v rodinách s dvanácti dětmi pochází z binomického rozdělení s parametry $N =$ .... a $p =$ .... vypočítejte pravděpodobnost, že v rodině s dvanácti dětmi bude

a. právě devět chlapců,

b. nejvýše čtyři chlapci,

c. alespoň osm chlapců,

d. čtyři, pět, šest, nebo sedm chlapců.

Řešení příkladu 4.3

```
[1] 0.067                                                          5
```

```
[1] 0.1589                                                         6
```

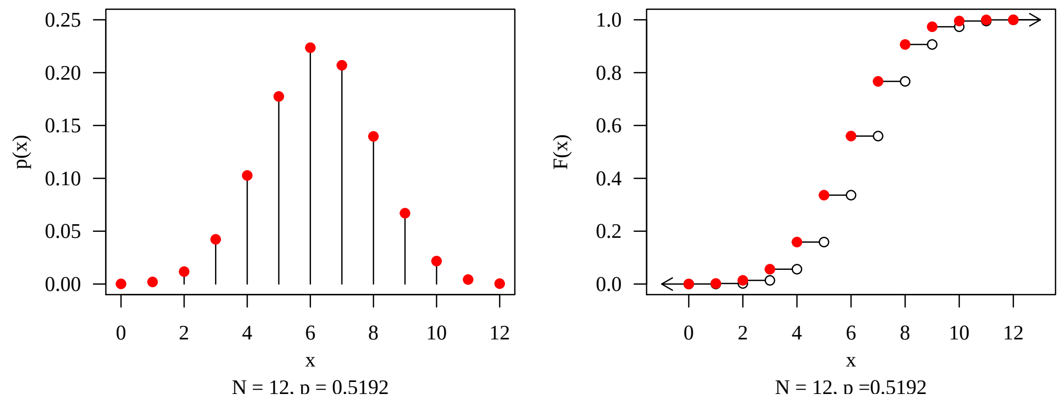
```
[1] 0.2331                                                         7
```

```
[1] 0.7108                                                         8
```

Interpretace výsledků: Pravděpodobnost, že v rodině bude právě devět chlapců, je ....%. Pravděpodobnost, že v rodině budou nejvýše čtyři chlapci, je ....%. Pravděpodobnost, že v rodině bude alespoň osm chlapců, je ....%. Pravděpodobnost, že v rodině bude čtyři, pět, šest, nebo sedm chlapců, je ....%.

Příklad 4.4. Graf pravděpodobnostní a distribuční funkce binomického modelu
Nakreslete graf pravděpodobnostní funkce a graf distribuční funkce binomického rozdělení $\mathrm{Bin}(N, p)$, kde $N = 12$ a $p = 0.5192$.

Řešení příkladu 4.4



Obrázek 2: Pravděpodobnostní a distribuční funkce binomického modelu

4.2 Poissonovo rozdělení $\mathrm{Po}(\lambda)$

- X ... počet událostí, které nastanou v jednotkovém časovém intervalu, přičemž k událostem dochází náhodně, jednotlivě a vzájemně nezávisle. Střední počet těchto událostí je vyjádřen parametrem $\lambda > 0$.
- $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$
- $\theta = \lambda$
- pravděpodobnostní funkce:
$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \; x = 0, 1, \ldots;$$
- vlastnosti: $E[X] = \lambda$; $\mathrm{Var}[X] = \lambda$
- dpois(x, lambda), ppois(x, lambda)

Příklad 4.5. Výpočet parametru λ Poissonova modelu
Načtete datový soubor 17-anova-newborns.txt a odstraňte z něj neznámá pozorování. Zaměřte se na znak $X =$*počet starších sourozenců* novorozence. Za předpokladu, že náhodná veličina X popisující počet starších sourozenců novorozence pochází z Poissonova rozdělení parametrem λ odhadněte střední hodnotu počtu starších sourozenců λ.

Řešení příkladu 4.5
Střední hodnotu počtu starších sourozenců odhadneme pomocí vzorce

$$\lambda = \frac{\text{počet starších sourozenců}}{\text{počet novorozenců}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}. \tag{2}$$

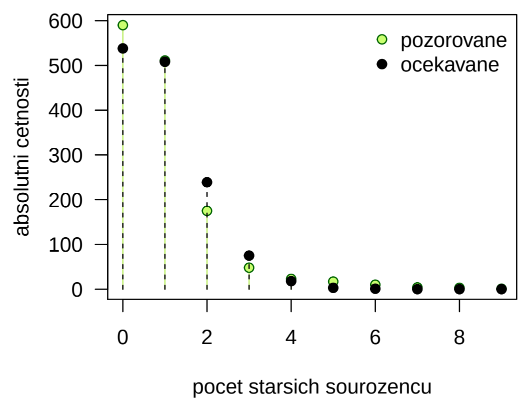
```
[1] 0.9428365
```
9

Interpetace výsledků: Střední hodnota počtu starších sourozenců novorozenců v datovém souboru $\lambda =$........ ....

Příklad 4.6. Porovnání pozorovaných a očekávaných početností v Poissonově modelu
Za předpokladu, že počet starších sourozenců novorozenců pochází z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda =$........... .... odhadněte očekávané početnosti starších sourozenců a porovnejte je s pozorovanými početnostmi.

Řešení příkladu 4.6

```
        0   1   2  3  4  5  6 7 8 9
m.obs 590 511 175 48 23 17 10 4 3 1
m.exp 538 508 239 75 18  3  1 0 0 0
```



Obrázek 3: Porovnání pozorovaných a očekávaných početností v Poissonově modelu

Příklad 4.7. Výpočet pravděpodobností za předpokladu Poissonova modelu
Vraťem se nyní k příkladu 4.5. Za předpokladu, že data pochází z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda =$ .... určete pravděpodobnost, novorozenec má

1. dva, tři nebo čtyři starší sourozence
2. alespoň čtyři starší sourozence
3. nejvýše dva
4. právě tri

Řešení příkladu 4.7

```
[1] 0.2403672
```

```
[1] 0.01568161
```

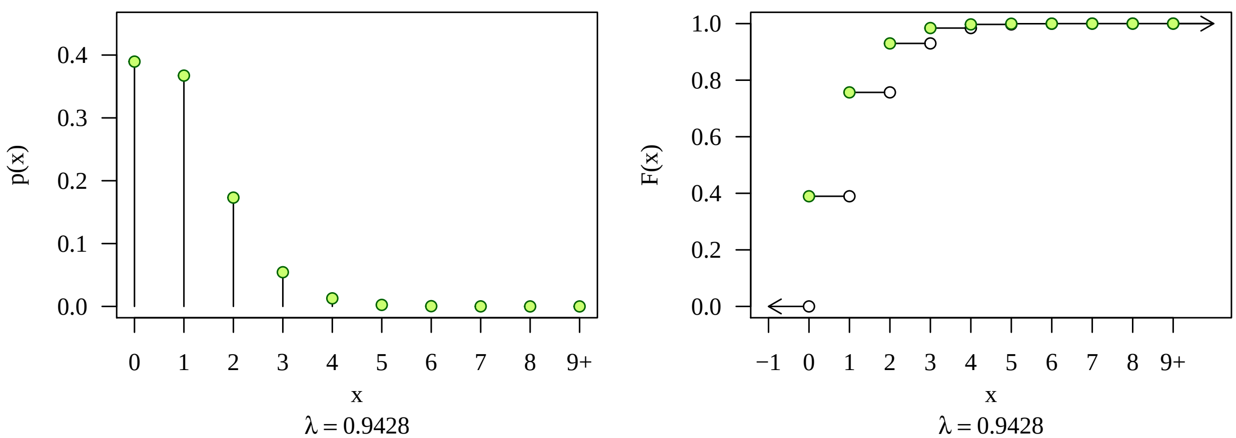
```
[1] 0.9299071
```

```
[1] 0.367255
```

Interpretace výsledů: Pravděpodobnost, že novorozenec bude mít dva, tři nebo čtyři starší sourozence je ....%. Pravděpodobnost, že novorozenec bude mít alespoň čtyři starší sourozence je ....%. Pravděpodobnost, že novorozenec bude mít nejvýše dva starší sourozence je ....%. Pravděpodobnost, že novorozenec bude mít jednoho staršího sourozence je ....%.

Příklad 4.8. Graf pravděpodobnostní a distribuční funkce Poissonova modelu
Nakreslete graf pravděpodobnostní a distribuční funkce Poissonova rozdělení Po(0.9428) v hodnotách $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, a $x \geq 9$.

Řešení příkladu 4.8



Obrázek 4: Pravděpodobnostní a distribuční funkce Poissonova modelu

4.3 Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

- $X_1, \ldots, X_n$ ... nezávislé náhodné veličiny
- Normální rozdělení
  - $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^T$
  - hustota
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
  - vlastnosti $\mathrm{E}[X] = \mu$; $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$
  - dnorm(x, mu, sigma), pnorm(x, mu, sigma), rnorm(M, mu, sigma), qnorm(alpha, mu, sigma)
- Standardizované normální rozdělení
  - $X \sim N(0, 1)$
  - $\boldsymbol{\theta} = (0, 1)^T$
  - hustota
$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
  - vlastnosti $\mathrm{E}[X] = 0$; $\mathrm{Var}[X] = 1$
  - dnorm(x), pnorm(x), rnorm(M), qnorm(alpha)
- Vlastnosti normálního rozdělení
  - **Věta 1:** Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Potom náhodná veličina $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Příklad 4.9. Výpočet pravděpodobností na základě normálního modelu
Na základě datového souboru obsahujícího údaje o porodní hmmotnosti novorozenců v jedné okresní nemocnici za období jednoho roku (Alánová, 2008) byla odhadnuta střední hodnota a směrodatná odchylka porodní hmotnosti novorozenců. Střední hodnota $\mu = 3078.94\,\text{g}$, směrodatná ochylka $s = 697\,\text{g}$. Za předpokladu, že data pochází z normálního rozdělení vypočítejte, jaká je pravděpodobnost, že porodní hmotnost novorozence bude (a) menší než 3800 g; (b) v rozmezí 2000–3000 g; (c) větší než 4000 g, (d) rovná 2100 g.

Řešení příkladu 4.9

```
[1] 0.8495533
```
17

```
[1] 0.743032
```
18

```
[1] 0.09317345
```
19

```
[1] 0
```
20

Interpretace výsledků: Pravděpodobnost, že porodní hmotnost novorozenců bude menší než 3800 g, je .... %. Pravděpodobnost, že porodní hmotnost novorozenců bude v rozmezí 2500–4200 mm, je ....%. Pravděpodobnost, že porodní hmotnost novorozenců bude větší než 4000 mm, je ....%. Pravděpodobnost, že porodní hmotnost novorozenců bude rovná 2100 g, je ....%, protože data pochází z normálního rozdělení, což je .... typ rozdělení, proto $\Pr(X = 2100) =$ ....

Příklad 4.10. Výpočet pravděpodobností na základě standardizovaného normálního modelu
Vraťme se nyní k předchozímu příkladu 4.9. Za předpokladu, že porodní hmotnost novorozenců pochází z normálního rozdělení $N(3078.94, 697^2)$ vypočítejte pravděpodobnost, že porodní hmotnost novorozence bude (a) menší než 3800 g; (b) v rozmezí 2000–3000 g; (c) větší než 4000 g, (d) rovná 2100 g. Řešení proveďte přes standardizaci náhodné veličiny X.

Řešení příkladu 4.10

```
[1] 0.8495533
```
21

```
[1] 0.743032
```
22

```
[1] 0.09317345
```
23

```
[1] 0
```
24

Interpretace výsledků: Pravděpodobnost, že porodní hmotnost novorozenců bude menší než 3800 g je .... %. Pravděpodobnost, že porodní hmotnost novorozenců bude v rozmezí 2500–4200 mm je ....%. Pravděpodobnost, že porodní hmotnost novorozenců bude větší než 4000 mm je ....%. Pravděpodobnost, že porodní hmotnost novorozenců bude rovná 2100 g je ....%, protože data pochází z normálního rozdělení, což je .... typ rozdělení, proto $\Pr(X = 2100) =$ ....

Příklad 4.11. Výpočet pravděpodobností na základě normálního modelu
Předpokládejme, že velký ročník na VŠ má výsledky ze statistiky normálně rozdělené kolem střední hodnoty 72 bodů se směrodatnou odchylkou 9 bodů. Najděte pravděpodobnost, že průměr výsledků náhodného výběru 10-ti studentů bude větší než 80 bodů.

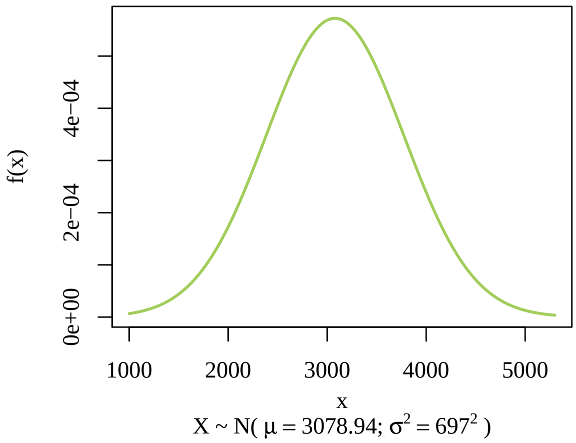
Řešení příkladu 4.9

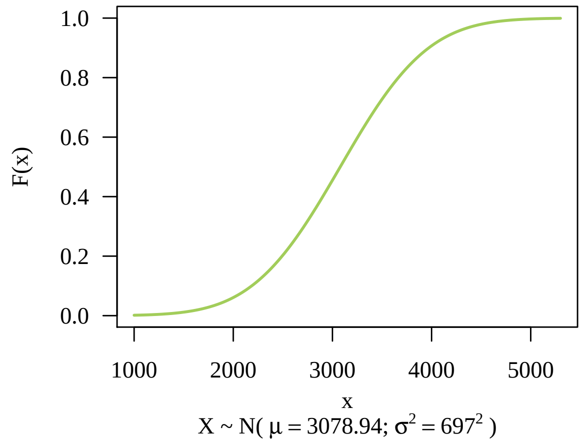
```
[1] 0.002470053
```
25

Interpretace výsledků: Pravděpodobnost, že průměr výsledků náhodného výběru 10-ti studentů bude větší než 80 bodů je .... %.

Příklad 4.12. Graf hustoty a distribuční funkce normálního modelu
Vraťme se k příkladu 4.9. Nakreslete graf hustoty a distribuční funkce náhodné veličiny $X \sim N(3078.94, 697)$.

Řešení příkladu 4.12





4.4 Aproximace binomického modelu normálním modelem

- Normální rozdělení je limitním rozdělením binomického rozdělení $\mathrm{Bin}(N, p)$, tedy pro $N \to \infty$, $p \to 0.5$:

$$X \sim \mathrm{Bin}(N, p) \to X \sim N(\mu, \sigma^2),$$

  kde $\mu = Np$ a $\sigma^2 = Np(1-p)$.

- Haldova podmínka: Nechť $X \sim \mathrm{Bin}(N, p)$ a platí, že $Np > 5$ a $N(1-p) > 5$. Potom rozdělení náhodné proměnné X můžeme aproximovat normálním rozdělením $X \sim N(Np, Np(1-p))$.

- Výše zmíněný poznatek je také znám jako **Moivre-Laplaceova věta**.

Příklad 4.13. Aproximace binomického modelu normálním modelem
Předpokládejme, že pravděpodobnost výskytu dermatoglyfického vzoru *vír* na palci pravé ruky u mužů české populace $p = 0.533$.

1. Jaká je pravděpodobnost, že ve vybraném vzorku 10 mužů bude výskyt dermatoglyfického vzoru *vír* na palci pravé ruky (a) alespoň u sedmi mužů; (b) nejvýše u pěti mužů; (c) u osmi nebo devíti mužů.

2. Jaká je pravděpodobnost, že ve vybraném vzorku 100 mužů bude výskyt dermatoglyfického vzoru *vír* na palci pravé ruky (a) alespoň u 56; (b) nejvýše u 53 mužů; (c) u 60–85 mužů.

Požadované pravděpodobnosti vypočítejte exaktně na základě binomického rozdělení a aproximačně na základě normálního rozdělení. Výsledné hodnoty navzájem porovnejte.

Řešení příkladu 4.13

```
          alespon 7 nejvyse 5    8-9
binomicke    0.2313    0.5396 0.0801
normalni     0.1449    0.4172 0.0353
```

```
          alespon 56 nejvyse 53  60-85
binomicke     0.3304     0.5151 0.1067
normalni      0.2942     0.4760 0.0896
```

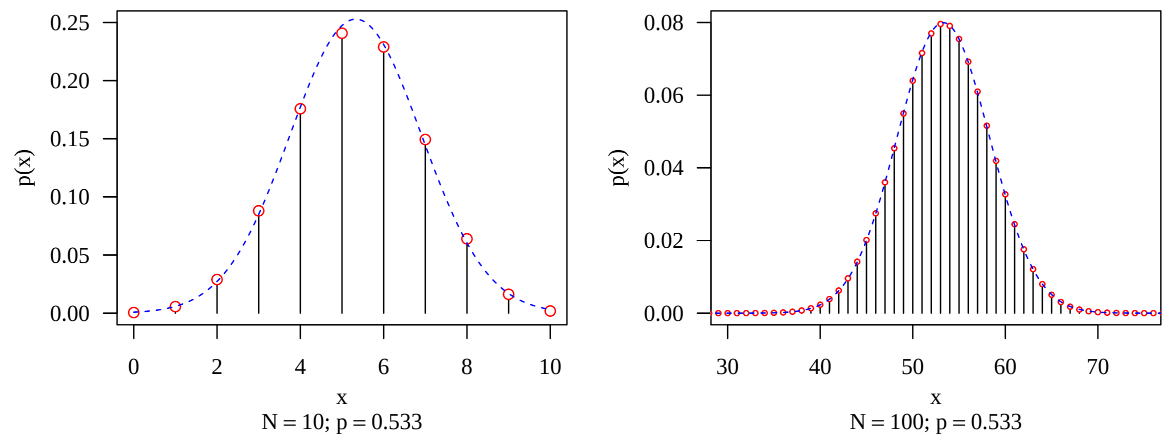
Interpretace výsledků: Pravděpodobnost výskytu dermatoglyfického vzoru *vír* alespoň u sedmi mužů z deseti je ....% (resp. ....%). Pravděpodobnost, výskytu vzoru *vír* nejvýše u pěti mužů z deseti je ....% (resp. ....%). Pravděpodobnost, výskytu vzoru *vír* u osmi nebo devíti mužů z deseti je ....% (resp. ....%). Protože Haldova podmínka dobré aproximace .... splněna, ... bychom aproximaci binomického rozdělení normálním rozdělením použít.

Pravděpodobnost výskytu dermatoglyfického vzoru *vír* alespoň u 56 mužů ze sta je ....% (resp. ....%). Pravděpodobnost výskytu vzoru *vír* nejvýše u 53 mužů ze sta je ....% (resp. ....%). Pravděpodobnost výskytu vzoru *vír* u 60–85 mužů ze sta je ....% (resp. ....%). Protože Haldova podmínka dobré aproximace .... splněna, ... aproximaci binomického rozdělení normálním rozdělením použít.

Příklad 4.14. Aproximace binomického modelu normálním modelem

Předpokládejme, že pravděpodobnost výskytu dermatoglyfického vzoru *vír* na palci pravé ruky u mužů české populace $p = 0.533$. Pro $N = 10$ a $N = 100$ vykreslete graf pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení a aproximujte jej křivkou funkce hustoty normálního rozdělení. Hodnoty obou funkcí porovnejte.

Řešení příkladu 4.14



Obrázek 5: Aproximace binomického modelu normálním modelem