7 Jednovýběrové parametrické testy

7.1 Test o rozptylu σ^2

Nechť $X_1, \ldots X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ neznáme a σ_0^2 je konstanta. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujeme jednu z následujících tří hypotéz oproti příslušné alternativní hypotéze.

$$
\begin{array}{lll}
H_{01}: \sigma^2 = \sigma_0^2 & \text{oproti} & H_{11}: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad \text{(oboustranná alt.)} \\
H_{02}: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 & \text{oproti} & H_{12}: \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad \text{(pravostranná alt.)} \\
H_{03}: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 & \text{oproti} & H_{13}: \sigma^2 < \sigma_0^2 \quad \text{(levostranná alt.)}
\end{array}
$$

Test nazýváme jednovýběrový F-test. Testovací statistika má tvar

$$
F_W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}, \tag{7.1}
$$

kde S je výběrová směrodatná odchylka, n je rozsah náhodného výběru a σ_0 je konstanta z nulové hypotézy. Za platnosti nulové hypotézy pochází statistika F_W z χ^2 rozdělení o $n-1$ stupních volnosti, tj.

$$
F_W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0}{\sim} \chi^2_{n-1}.
$$

Kritický obor podle zvolené alternativní hypotézy má tvar

$$
\begin{array}{ll}
H_{11}: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 & W = \big(0\,;\, \chi^2_{n-1}(\alpha/2)\big\rangle \cup \big\langle \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)\,;\, \infty\big) \\
H_{12}: \sigma^2 > \sigma_0^2 & W = \big\langle \chi^2_{n-1}(1-\alpha)\,;\, \infty\big) \\
H_{13}: \sigma^2 < \sigma_0^2 & W = \big(0\,;\, \chi^2_{n-1}(\alpha)\big\rangle
\end{array}
$$

kde $\chi^2_{n-1}(\alpha/2)$, $\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)$, $\chi^2_{n-1}(\alpha)$, $\chi^2_{n-1}(1-\alpha)$ jsou kvantily χ^2 rozdělení o $n-1$ stupních volnosti, jejichž hodnoty získáme pomocí softwaru a implementované funkce `qchisq()`.

Interval spolehlivosti má podle zvolené alternativní hypotézy jeden z následujících tvarů

$$
\begin{array}{ll}
H_{11}: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 & (d, h) = \left(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}\,,\, \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)} \right) \\
H_{12}: \sigma^2 > \sigma_0^2 & (d, \infty) = \left(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha)}\,,\, \infty \right) \\
H_{13}: \sigma^2 < \sigma_0^2 & (0, h) = \left(0\,,\, \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha)} \right)
\end{array}
$$

Poznámka: Protože parametr σ^2 je vždy větší než 0, můžeme dolní hranici pravostranného intervalu spolehlivosti zvolit 0 namísto mínus nekonečna.

p-hodnota má v závislosti na zvolené alternativní hypotéze jeden z následujících tvarů

$$
\begin{array}{ll}
H_{11}: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 & p\text{-hodnota} = 2\min\{\Pr(F_W \leq f_W)\,,\, \Pr(F_W > f_W)\} \\
H_{12}: \sigma^2 > \sigma_0^2 & p\text{-hodnota} = \Pr(F_W > f_W) = 1 - \Pr(F_W \leq f_W) \\
H_{13}: \sigma^2 < \sigma_0^2 & p\text{-hodnota} = \Pr(F_W \leq f_W)
\end{array}
$$

kde F_W je náhodná veličina, f_W je realizace testovací statistiky F_W (viz vzorec 7.1), tedy konkrétní číslo, a $\Pr(F_W \leq f_W)$ je distribuční funkce χ^2 rozdělení o $n-1$ stupních volnosti, jejíž hodnotu získáme pomocí a implementované funkce `pchisq()`.

Poznámka: Test o rozptylu můžeme využít také jako test o směrodatné odchylce.

Příklad 7.1. Test o rozptylu σ^2
Mějme datový soubor 01-one-sample-mean-skull-mf.txt a proměnnou skull.L popisující největší délku mozkovny v mm jedinců starověké egyptské populace (viz sekce **??**). Dále máme k dispozici údaje o největší délce mozkovny mužů novověké egyptské populace ($m_m = 177.468\,\text{mm}$, $s_m = 7.526\,\text{mm}$, $n_m = 88$). Na hladině významnosti $\alpha = 0.01$ zjistěte, se rozptyly největší délky mozkovny mužů starověké a novověké egyptské populace liší.

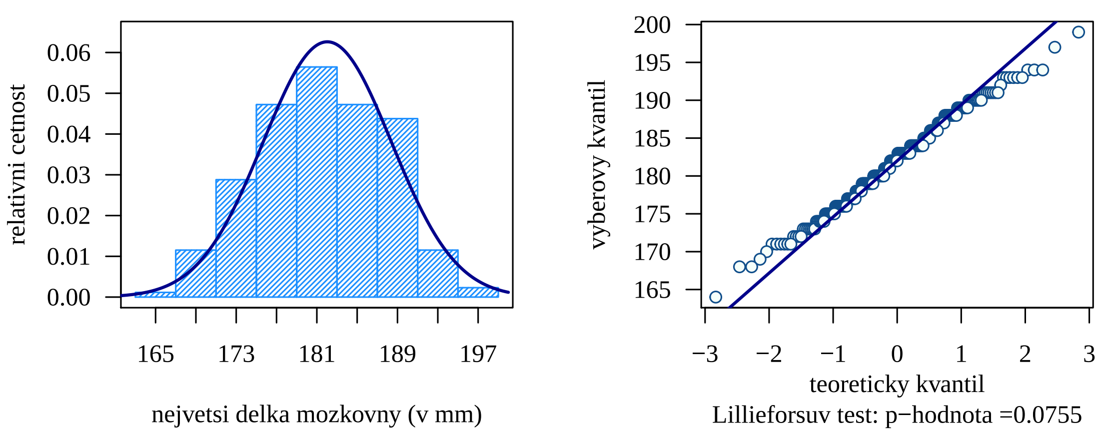
Řešení příkladu 7.1
Pomocí příkazu read.delim() načteme datový soubor a pomocí operátoru [] vybereme z datové tabulky naměřené hodnoty největších délek mozkovny (skull.L) mužů (sex == 'm'). Nakonec příkazem na.omit() odstraníme z vektoru naměřených hodnot chybějící údaje a příkazem length() zjistíme rozsah náhodného výběru.

```
data <- read.delim('00-Data//01-one-sample-mean-skull-mf.txt')
skull.LM <- data[data$sex == 'm', 'skull.L']
skull.LM <- as.numeric(na.omit(skull.LM))
n <- length(skull.LM) # 217
```

Datový soubor obsahuje údaje o největší délce mozkovny 217 mužů starověké egyptské populace.

Naším úkolem ze zadání je porovnat rozptyly dvou egyptských populací, přičemž u mužů ze starověké egyptské populace máme k dispozici naměřené hodnoty. Na základě těchto hodnot můžeme zjistit, zda náhodný výběr pochází z normálního rozdělení, tj. zda náhodná veličina X popisující největší délku mozkovny mužů starověké egyptské populace pochází z normálního rozdělení, tj. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Druhá, novověká egypská populace je reprezentována pouze hodnotou aritmetického průměru ($m_m = 177.568\,\text{mm}$) a směrodatnou odchylkou ($s_m = 7.526\,\text{mm}$). O jejím rozdělení přesnější informace nemáme. Řešení příkladu tedy vede na situaci, kdy rozptyl jednoho náhodného výběru porovnáváme s konkrétním číslem, tedy na jednovýběrový test o rozptylu σ^2. Jediným předpokladem k použití tohoto testu je normální rozdělení náhodného výběru naměřených délek mozkovny mužů starověké egyptské populace. Před použitím testu tedy tento předpoklad ověříme.

Hladinu významnosti α pro test normality stanovíme standartně, tj. $\alpha = 0.05$. Jelikož rozsah náhodného výběru je větší než 30, ověříme předpoklad normality Lillieforsovým testem. Grafické ověření provedeme na základě kvantilového diagramu a histogramu superponovaného křivkou normálního rozdělení, jejíž parametry odhadneme pomocí výběrového průměru a výběrového rozptylu (viz obrázek 1). Datový soubor rozdělíme do devíti ekvidistatních intervalů s šířkou 4 mm prostřednictvím stanovených hranic $163, 167, \ldots, 199$.



Obrázek 1: Histogram a kvantilový diagram největší délky mozkovny mužů starověké egyptské populace

Protože p-hodnota $= 0.0755$ je větší než 0.05, nulovou hypotézu o normalitě dat nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Z histogramu na obrázku 1 vidíme, že naměřené hodnoty celkem věrně kopírují tvar teoretické křivky hustoty normálního rozdělení. Na kvantilovém diagramu je zřejmé odchýlení bodů od referenční křivky na obou chvostech. Podle Lillieforsova testu nemá však toto odchýlení statisticky významný vliv na normální rozdělení náhodného výběru. Náhodný výběr největších délek mozkovny mužů ze starověké egyptské populace pochází z normálního rozdělení.

Protože náhodný výběr pochází z normálního rozdělení, můžeme hypotézu ze zadání otestovat pomocí parametrického testu o rozptylu σ^2. Testování provedeme v posloupnosti sedmi kroků. Naším úkolem je zjistit, zda se rozptyly největší délky mozkovny mužů u starověké a novověké egyptské populace liší. Tato věta bude součástí alternativní hypotézy, neboť odlišnost implikuje nerovnost a nerovnost je vždy součástí alternativní hypotézy. Nulovou hypotézu potom stanovíme jako doplněk alternativní hypotézy.

1. **Stanovení hypotéz**
   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
     H_0 : *Rozptyl největší délky mozkovny mužů starověké egyptské populace je shodný s rozptylem největší délky mozkovny mužů novověké egyptské populace.*
     H_1 : *Rozptyl největší délky mozkovny mužů starověké egyptské populace není shodný s rozptylem největší délky mozkovny mužů novověké egyptské populace.*
   - **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
     $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, kde $\sigma_0^2 = 7.526^2$
     $H_1 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, kde $\sigma_0^2 = 7.526^2$ (oboustranná alternativa)
2. **Volba hladiny významnosti**
   - Hladinu významnosti volíme v souladu se zadáním jako $\alpha = 0.01$.
3. **Testování kritickým oborem**
   - **Testovací statistika**

$$F_W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(217-1)6.370398^2}{7.526^2} = \frac{216 \times 40.58197}{56.64068} = 154.7599.$$

```
alpha <- 0.01
sigma_0 <- 7.526
s  <- sd(skull.LM)
fw <- ((n - 1) * s ^ 2) / (sigma_0 ^ 2) # 154.7599
```

   - **Kritický obor**

$$\begin{aligned} W &= \big(0\,;\,\chi^2_{n-1}(\alpha/2)\big\rangle \cup \big\langle \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)\,;\,\infty\big) \\ &= \big(0\,;\,\chi^2_{217-1}(0.01/2)\big\rangle \cup \big\langle \chi^2_{217-1}(1-0.01/2)\,;\,\infty\big) \\ &= \big(0\,;\,\chi^2_{216}(0.005)\big\rangle \cup \big\langle \chi^2_{216}(0.995)\,;\,\infty\big) \\ &= (0\,;\,81.1329\rangle \cup \langle 138.6506\,;\,\infty) \end{aligned}$$

```
qchisq(alpha / 2, n - 1) # 166.2201
qchisq(1 - alpha / 2, n - 1) # 273.2856
```

   - **Závěr testování**
     Protože realizace testovací statistiky $f_W = 154.7599$ náleží do kritického oboru, tj. $f_W \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.01$.
4. **Testování intervalem spolehlivosti**

- **Interval spolehlivosti**

$$
\begin{aligned}
(d,h) &= \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}\,,\,\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)}\right)\\
&= \left(\frac{(217-1)6.370398^2}{\chi^2_{217-1}(1-0.01/2)}\,,\,\frac{(217-1)6.370398^2}{\chi^2_{217-1}(0.01/2)}\right)\\
&= \left(\frac{216\times 40.58197}{\chi^2_{216}(0.995)}\,,\,\frac{216\times 40.58197}{\chi^2_{216}(0.005)}\right)\\
&= \left(\frac{8765.706}{273.2856}\,,\,\frac{8765.706}{166.2201}\right)\\
&= (32.07524\,,\,52.7355)
\end{aligned}
$$

```
dh <- (n - 1) * s ^ 2 / qchisq(1 - alpha / 2, n - 1) # 32.07525
hh <- (n - 1) * s ^ 2 / qchisq(alpha / 2, n - 1) # 52.73553
```

- **Závěr testování**
  Protože $\sigma_0^2 = 7.526^2 = 56.64068$ nenáleží do Waldova 99% empirického oboustranného intervalu spolehlivosti, tj. $\sigma_0^2 = 56.64068 \notin IS$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.01$.

5. **Testování p-hodnotou**

- **p-hodnota**

$$
\begin{aligned}
p\text{-hodnota} &= 2\min\{\Pr(F_W \le f_W)\,,\,\Pr(F_W > f_W)\}\\
&= 2\min\{\Pr(F_W \le f_W)\,,\,1-\Pr(F_W \le f_W)\}\\
&= 2\min\{\Pr(T_W \le 154.7599)\,,\,1-\Pr(T_W \le 154.7599)\}\\
&= 2\min\{0.00057779\,,\,0.9994222\}\\
&= 2\times 0.00057779 = 0.00115558 \doteq 0.001156
\end{aligned}
$$

```
p.val <- 2 * min (pchisq(fw, n - 1), 1 - pchisq(fw, n - 1)) # 0.00115558
```

- **Závěr testování**
  Protože p-hodnota $= 0.001156$ je menší než $\alpha = 0.01$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.01$.

6. **Interpretace výsledků**
   Za základě všech tří typů testování zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Mezi rozptyly největší délky mozkovny mužů starověké a novověké egyptské populace existuje statisticky významný rozdíl.

Poznámka: Test rozptylu σ^2 můžeme provést pomocí funkce varTest() z knihovny EnvStats. Vstupními parametry budou vektor reprezentující náhodný výběr (skull.LM), hodnota parametru σ_0^2 z nulové hypotézy zadaná argumentem sigma.squared $= 7.526^2$, hodnota hladiny významnosti α zadaná prostřednictvím koeficientu spolehlivosti $1-\alpha$ nastavením hodnoty argumentu conf.level = 0.99 a typ zvolené alternativní hypotézy (oboustranná) zadaný pomocí argumentu alternative = 'two.sided'.

```
EnvStats::varTest(skull.LM, sigma.squared = 7.526^2, conf.level = 0.99, alt = 'two.sided
    ') # 0.001448 # alpha = 0.01 Z
```

Součástí výstupu je hodnota výběrového rozptylu variance = 40.58197, hodnota testovací statistiky Chi-squared = 154.76, počet stupňů volnosti Studentova rozdělení df = 216, hranice 95% Waldova empirického oboustranného

```

        Chi-Squared Test on Variance

data:  skull.LM
Chi-Squared = 154.76, df = 216, p-value = 0.001156
alternative hypothesis: true variance is not equal to 56.64068
99 percent confidence interval:
 32.07525 52.73553
sample estimates:
variance
40.58197
```

intervalu spolehlivosti 32.07525 a 52.73553 a p-hodnota p-value $=$ 0.001156. Jediné, co musíme stanovit zvlášť, jsou dolní a horní hranice kritického oboru. ★

Příklad 7.2. Test o rozptylu σ^2
Mějme datový soubor 18-more-samples-variances-clavicle.txt a proměnnou cla.L popisující největší délku klíční kosti z pravé strany v mm (viz sekce **??**). Dále máme k dispozici údaje o největší délce klíční kosti z pravé strany mužů z populace severozápadní Indie ($m_{nwI} = 146.89$ mm, $s_{nwI} = 9.23$ mm, $n_{nwI} = 100$). Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ zjistěte, zda je rozptyl největší délky klíční kosti z pravé strany u mužů populace z Amritsaru menší než rozptyl největší délky klíční kosti z pravé strany mužů populace severozápadní Indie.

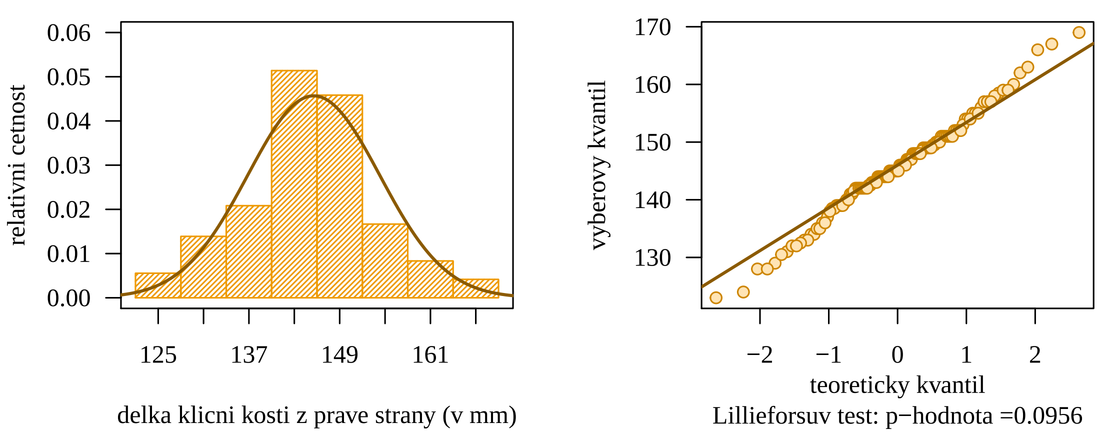
Řešení příkladu 7.2
Příkazem read.delim() načteme datový soubor a pomocí operátoru [] vybereme z datové tabulky naměřené délky klíční kosti (cla.L) mužů populace z Amritsaru (pop == 'ind1'). Nakonec z vektoru naměřených hodnot odstraníme chybějící údaje (na.omit()) a zjistíme jeho délku (length()).

```
data <- read.delim('00-Data//18-more-samples-variances-clavicle.txt')
data <- na.omit(data)
cla.LI <- data[data$pop == 'ind1', 'cla.L']
n <- length(cla.LI) # 120
```

Datový soubor obsahuje údaje o délce klíční kosti z pravé strany u 120 mužů populace z Amritsaru.

Naším úkolem ze zadání je porovnat rozptyly dvou indických populací, přičemž u mužů z populace z Amritsaru známe naměřené hodnoty. Na základě těchto hodnot můžeme zjistit, zda náhodný výběr pochází z normálního rozdělení. Druhá populace, a sice ze sevenrí Indie je reprezentována pouze hodnotou aritmetického průměru ($m_{nwI} = 146.89$ mm) a směrodatnou odchylkou ($s_{nwI} = 9.23$ mm). O jejím rozdělení přesnější informace nemáme. Řešení příkladu vede na případ, kdy rozptyl jednoho náhodného výběru porovnáváme s konkrétním číslem, tedy na jednovýběrový test o rozptylu σ^2. Předpokladem k použití tohoto testu je normalita náhodného výběru délek klíčních kostí z pravé strany u mužů z populace z Amritsaru. Před použitím testu je třeba tento předpoklad ověřit.

Jelikož rozsah náhodného výběru je větší než 30, ověříme předpoklad normality Lillieforsovým testem ($\alpha = 0.05$). Grafické ověření provedeme kvantilovým diagramem a histogramem (viz obrázek 2). Datový soubor rozdělíme do osmi ekvidistatních intervalů s šířkou 6 mm prostřednictvím stanovených hranic $122, 130, \ldots, 170$.



Obrázek 2: Histogram a kvantilový diagram největší délky klíční kosti z pravé strany u mužů z populace v Amritsaru

Protože p-hodnota $= 0.0956$ je větší než 0.05, nulovou hypotézu o normalitě dat nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Z histogramu na obrázku 2 vidíme, že naměřené hodnoty kopírují vhodně tvar křivky hustoty normálního rozdělení. Na kvantilovém diagramu je zřejmý trend odlehlosti bodů od referenční křivky na pravé i levé straně. Tato odlehlost však není fatální pro předpoklad normality náhodého výběru. Náhodný výběr délek klíčních kostí z pravé strany u mužů z populace z Amritsaru pochází z normálního rozdělení.

Jelikož je předpoklad normality náhodného výběru splněn, můžeme hypotézu ze zadání otestovat pomocí parametrického testu o rozptylu σ^2. Naším úkolem je zjistit, zda je rozptyl největší délky klíční kosti z pravé strany u mužů populace z Amritsaru menší než rozptyl největší délky klíční kosti z pravé strany mužů populace severozápadní Indie. Tato věta je zněním alternativní hypotézy. Nulovou hypotézu stanovíme jako doplněk k tomuto tvrzení.

1. **Stanovení hypotéz**

   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
     H_0 : *Rozptyl největší délky klíční kosti z pravé strany u mužů populace z Amritsaru je větší nebo roven rozptylu největší délky klíční kosti z pravé strany mužů z populace severozápadní Indie.*
     H_1 : *Rozptyl největší délky klíční kosti z pravé strany u mužů populace z Amritsaru je menší než rozptyl největší délky klíční kosti z pravé strany mužů z populace severozápadní Indie.*
   - **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
     $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$, kde $\sigma_0^2 = 9.23^2$
     $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$, kde $\sigma_0^2 = 9.23^2$ (levostranná alternativa)

2. **Volba hladiny významnosti**

   - Hladinu významnosti volíme v souladu se zadáním jako $\alpha = 0.05$.

3. **Testování kritickým oborem**

   - **Testovací statistika**

$$F_W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(120-1)8.733432^2}{9.23^2} = \frac{119 \times 76.27283}{85.1929} = 106.5402.$$

```
alpha <- 0.05
sigma_0 <- 9.23
s  <- sd(cla.LI)
fw <- ((n - 1) * s ^ 2) / (sigma_0 ^ 2) # 106.5402
```

   - **Kritický obor**

$$\begin{aligned} W &= \left(0\,;\, \chi^2_{n-1}(\alpha)\right\rangle \\ &= \left(0\,;\, \chi^2_{120-1}(0.05)\right\rangle \\ &= (0\,;\, 94.8112\rangle \end{aligned}$$

```
qchisq(alpha, n - 1) # 94.81124
```

   - **Závěr testování**
     Protože realizace testovací statistiky $f_W = 106.5402$ nenáleží do kritického oboru, tj. $f_W \notin W$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

4. **Testování intervalem spolehlivosti**

   - **Interval spolehlivosti**

$$\begin{aligned} (0, h) &= \left(0\,,\, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)}\right) \\ &= \left(0\,,\, \frac{(120-1)8.733432^2}{\chi^2_{120-1}(0.05)}\right) \\ &= \left(0\,,\, \frac{119 \times 76.27283}{94.81124}\right) \\ &= (0\,,\, 95.73197) \end{aligned}$$

```
hh <- (n - 1) * s ^ 2 / qchisq(alpha, n - 1) # 295.73197
```

- **Závěr testování**
  Protože $\sigma_0^2 = 9.23^2 = 85.1929$ náleží do Waldova 95% empirického pravostranného intervalu spolehlivosti, tj. $\sigma_0^2 = 85.1929 \in IS$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

5. **Testování p-hodnotou**

   - **p-hodnota**

$$p\text{-hodnota} = \Pr(T_W \leq 106.5402) = 0.2135755 \doteq 0.2136$$

```
p.val <- pchisq(fw, n - 1) # 0.2135755
```

   - **Závěr testování**
     Protože p-hodnota $= 0.2136$ je větší než $\alpha = 0.05$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

6. **Interpretace výsledků**
   Za základě všech tří typů testování nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Rozptyl největší délky klíční kosti z pravé strany u mužů z populace z Amritsaru není statisticky významně menší než rozptyl délky klíční kosti z pravé strany u mužů z populace severozápadní Indie.

Poznámka: Test rozptylu σ^2 můžeme provést pomocí funkce varTest() z knihovny EnvStats. Vstupními parametry budou vektor reprezentující náhodný výběr (cla.LI), hodnota parametru σ_0^2 (argument sigma.squared = 9.23^2), hodnota hladiny významnosti α zadaná prostřednictvím koeficientu spolehlivosti $1 - \alpha$ (argument conf.level = 0.95) a typ zvolené alternativní hypotézy (levostranná; argument alternative = 'less').

```
EnvStats::varTest(cla.LI, sigma.squared = 9.23^2 , alt = 'less')
```

```

        Chi-Squared Test on Variance

data:  cla.LI
Chi-Squared = 106.54, df = 119, p-value = 0.2136
alternative hypothesis: true variance is less than 85.1929
95 percent confidence interval:
  0.00000 95.73197
sample estimates:
variance
76.27283
```

Součástí výstupu je hodnota výběrového rozptylu variance = 76.27283, hodnota testovací statistiky Chi-squared = 106.54, počet stupňů volnosti Studentova rozdělení df = 119, hranice 95% Waldova empirického pravostranného intervalu spolehlivosti 0 a 95.73197 a p-hodnota p-value = 0.2136. Jediné, co musíme stanovit zvlášť, je horní hranice kritického oboru. ★

Příklad 7.3. Test o směrodatné odchylce σ

Mějme datový soubor 11-two-samples-means-skull.txt a proměnnou skull.H popisující basion–bregmatickou výšku lebky v mm jedinců starověké egyptské populace (viz sekce **??**). Dále máme k dispozici údaje o basion–bregmatické výšce lebky mužů novověké egyptské populace ($m_m = 133.977\,\text{mm}$, $s_m = 5.171\,\text{mm}$, $n_m = 87$). Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ zjistěte, zda jsou směrodatné odchylky basion–bregmatické výšky lebky mužů starověké a novověké egyptské populace shodné.

Řešení příkladu 7.3

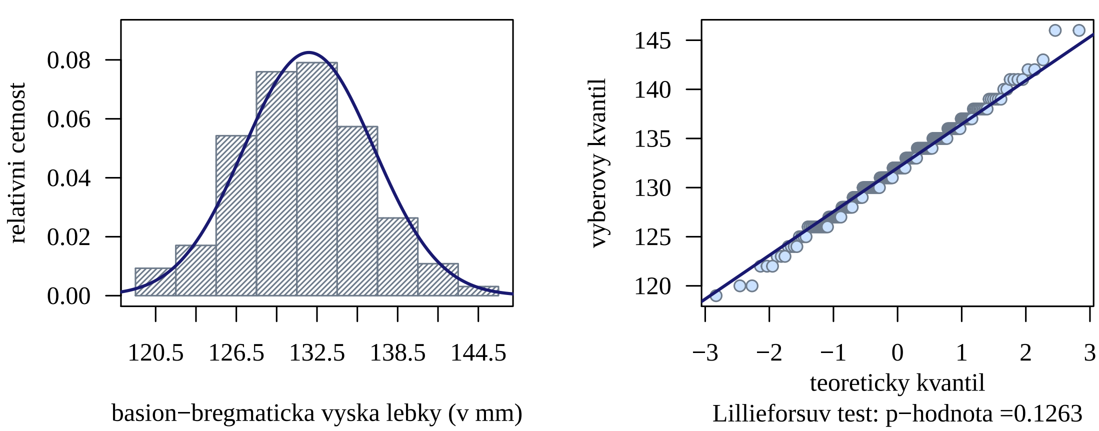
Nejprve načteme datový soubor. Pomocí operátoru [] vybereme z datové tabulky naměřené basion–bregmatické výšky lebky (skull.H) mužů (sex == 'm'). Nakonec z vektoru naměřených hodnot odstraníme chybějící údaje a zjistíme počet naměřených údajů.

```
data <- read.delim('00-Data//11-two-samples-means-skull.txt')
skull.HM <- data[data$sex == 'm', 'skull.H']
skull.HM <- as.numeric(na.omit(skull.HM))
n <- length(skull.HM) # 215
```

Datový soubor obsahuje údaje o basion-bregmatické výšce lebky 215 mužů starověké egyptské populace.

Naším úkolem ze zadání je porovnat směrodatné odchylky dvou egyptských populací, přičemž u mužů ze starověké egyptské populace máme k dispozici naměřené hodnoty. Na základě těchto hodnot můžeme zjistit, zda náhodný výběr pochází z normálního rozdělení. Druhá, novověká egypská populace je reprezentována pouze hodnotou aritmetického průměru ($m_m = 133.977\,\text{mm}$) a směrodatnou odchylkou ($s_m = 5.171\,\text{mm}$). O jejím rozdělení přesnější informace nemáme. V rámci příkladu tedy porovnáváme směrodatnou odchylku jednoho náhodného výběru s konkrétním číslem. K tomu, po vhodné modifikaci nulové a alternativní hypotézy, použijeme jednovýběrový test o rozptylu σ^2. Jediným předpokladem k použití tohoto testu je normální rozdělení náhodného výběru basion–bregmatických výšek lebky mužů starověké egyptské populace. Před použitím testu tedy tento předpoklad ověříme.

Vzhledem k rozsahu náhodného výběru ověříme předpoklad normality Lillieforsovým testem ($\alpha = 0.05$)Graficky zhodnotíme náhondý výběr kvantilovým diagramem a histogramem (viz obrázek 3). Datový soubor rozdělíme do devíti ekvidistatních intervalů s šířkou 3 mm prostřednictvím stanovených hranic $119, 122, \ldots, 146$.



Obrázek 3: Histogram a kvantilový diagram basion–bregmatické výšky lebky mužů starověké egyptské populace

Protože p-hodnota $= 0.1263$ je větší než 0.05, nulovou hypotézu o normalitě dat nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Z histogramu na obrázku 3 vidíme, že naměřené hodnoty věrně kopírují tvar křivky hustoty normálního rozdělení. Na kvantilovém diagramu je viditelná příchylnost bodů k referenční křivce. Náhodný výběr basion–bregmatické výšky lebky mužů ze starověké egyptské populace tedy pochází z normálního rozdělení.

Protože náhodný výběr pochází z normálního rozdělení, můžeme hypotézu ze zadání otestovat pomocí parametrického testu. Naším úkolem je zjistit, zda jsou směrodatné odchylky basion–bregmatické výšky lebky mužů starověké a novověké egyptské populace shodné. Jelikož rozptyl není nic jiného než mocnina směrodatné odchylky, můžeme bez újmy na obecnosti znění této věty modifikovat na otázku, zda jsou rozptyly basion–bregmatické výšky lebky mužů starověké a novověké egyptské populace shodné. Tato věta potom bude součástí H_0, neboť shoda implikuje rovnost a rovnost je vždy součástí nulové hypotézy. Alternativní hypotézu potom stanovíme jako doplněk nulové hypotézy.

1. **Stanovení hypotéz**
   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
     H_0 : *Rozptyl basion–bregmatické výšky lebky mužů starověké egyptské populace a rozptyl basion–bregmatické výšky lebky novověké egyptské populace jsou shodné.*
     H_1 : *Rozptyl basion–bregmatické výšky lebky mužů starověké egyptské populace a rozptyl basion–bregmatické výšky lebky novověké egyptské populace nejsou shodné.*
   - **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
     $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, kde $\sigma_0^2 = 5.171^2$
     $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, kde $\sigma_0^2 = 5.171^2$ (oboustranná alternativa)
2. **Volba hladiny významnosti**
   - Hladinu významnosti volíme v souladu se zadáním jako $\alpha = 0.05$.
3. **Testování kritickým oborem**
   - **Testovací statistika**

$$F_W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(215-1)4.835494^2}{5.171^2} = \frac{214 \times 23.382}{26.73924} = 187.1313.$$

```r
alpha <- 0.05
sigma_0 <- 5.171
s  <- sd(skull.HM)
fw <- ((n - 1) * s ^ 2) / (sigma_0 ^ 2) # 187.1313
```

   - **Kritický obor**

$$\begin{aligned} W &= \left(0\,;\, \chi^2_{n-1}(\alpha/2)\right\rangle \cup \left\langle \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)\,;\, \infty\right) \\ &= \left(0\,;\, \chi^2_{215-1}(0.05/2)\right\rangle \cup \left\langle \chi^2_{215-1}(1-0.05/2)\,;\, \infty\right) \\ &= \left(0\,;\, \chi^2_{214}(0.025)\right\rangle \cup \left\langle \chi^2_{214}(0.975)\,;\, \infty\right) \\ &= (0\,;\, 175.3782\rangle \cup \langle 256.4079\,;\, \infty) \end{aligned}$$

```r
qchisq(alpha / 2, n - 1) # 175.3782
qchisq(1 - alpha / 2, n - 1) #  256.4079
```

   - **Závěr testování**
     Protože realizace testovací statistiky $f_W = 187.1313$ nenáleží do kritického oboru, tj. $f_W \notin W$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.
4. **Testování intervalem spolehlivosti**

- **Interval spolehlivosti**

$$
\begin{aligned}
(d, h) &= \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)} \, , \, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)} \right) \\
&= \left(\frac{(215-1)4.835494^2}{\chi^2_{215-1}(1-0.05/2)} \, , \, \frac{(215-1)4.835494^2}{\chi^2_{215-1}(0.05/2)} \right) \\
&= \left(\frac{214 \times 23.382}{\chi^2_{214}(0.975)} \, , \, \frac{214 \times 23.382}{\chi^2_{214}(0.025)} \right) \\
&= \left(\frac{5003.748}{256.4079} \, , \, \frac{5003.748}{175.3782} \right) \\
&= (19.5148 \, , \, 28.53119)
\end{aligned}
$$

```
dh <- (n - 1) * s ^ 2 / qchisq(1 - alpha / 2, n - 1) # 19.5148
hh <- (n - 1) * s ^ 2 / qchisq(alpha / 2, n - 1) # 28.5312
```

- **Závěr testování**
  Protože $\sigma_0^2 = 5.171^2 = 26.7392$ náleží do Waldova 95% empirického oboustranného intervalu spolehlivosti, tj. $\sigma_0^2 = 26.73924 \in IS$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

5. **Testování p-hodnotou**

- **p-hodnota**

$$
\begin{aligned}
p\text{-hodnota} &= 2\min\{\Pr(F_W \leq f_W) \, , \, 1 - \Pr(F_W \leq f_W)\} \\
&= 2\min\{\Pr(T_W \leq 187.1313) \, , \, 1 - \Pr(T_W \leq 187.1313)\} \\
&= 2\min\{0.09260461 \, , \, 0.9073954\} \\
&= 2 \times 0.09260461 = 0.1852092 \doteq 0.1852
\end{aligned}
$$

```
p.val <- 2 * min (pchisq(fw, n - 1), 1 - pchisq(fw, n - 1)) # 0.1852092
```

- **Závěr testování**
  Protože p-hodnota $= 0.1852$ je větší než $\alpha = 0.05$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

6. **Interpretace výsledků**
   Za základě všech tří typů testování nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Mezi rozptyly basion-bregmatické výšky lebky mužů starověké a novověké egyptské populace neexistuje statisticky významný rozdíl. Výsledný závěr můžeme bez újmy na obecnosti modifikovat na závěr týkající se směrodatné odchylky. Mezi směrodatnými odchylkami basion-bregmatické výšky lebky mužů starověké a novověké egyptské populace neexistuje statisticky významný rozdíl.

Poznámka: Test o směrodatné odchylce σ můžeme, analogicky jako test o rozptylu σ^2, provést pomocí funkce varTest() s vstupním vektorem dat skull.HM a argumenty sigma.squared = 5.171^2, conf.level = 0.95 a alternative = 'two.sided'.

```
EnvStats::varTest(skull.HM, sigma.squared = 5.171^2 , alt = 'two.sided')
```

★

```

        Chi-Squared Test on Variance

data:  skull.HM
Chi-Squared = 187.13, df = 214, p-value = 0.1852
alternative hypothesis: true variance is not equal to 26.73924
95 percent confidence interval:
 19.5148 28.5312
sample estimates:
variance
  23.382
```

Příklad 7.4. Test o směrodatné odchylce σ
Mějme datový soubor 01-one-sample-mean-skull-mf.txt a proměnnou skull.B popisující největší šířku mozkovny v mm jedinců starověké egyptské populace (viz sekce **??**). Dále máme k dispozici údaje o největší šířce mozkovny žen novověké egyptské populace ($m_f = 131.038\,\text{mm}$, $s_f = 5.361\,\text{mm}$, $n_f = 52$). Na hladině významnosti $\alpha = 0.10$ testujte hypotézu, že směrodatná odchylka největší šířky mozkovny žen starověké egyptské populace je menší nebo rovna směrodatné odchylce největší šířky mozkovny žen novověké egyptské populace.

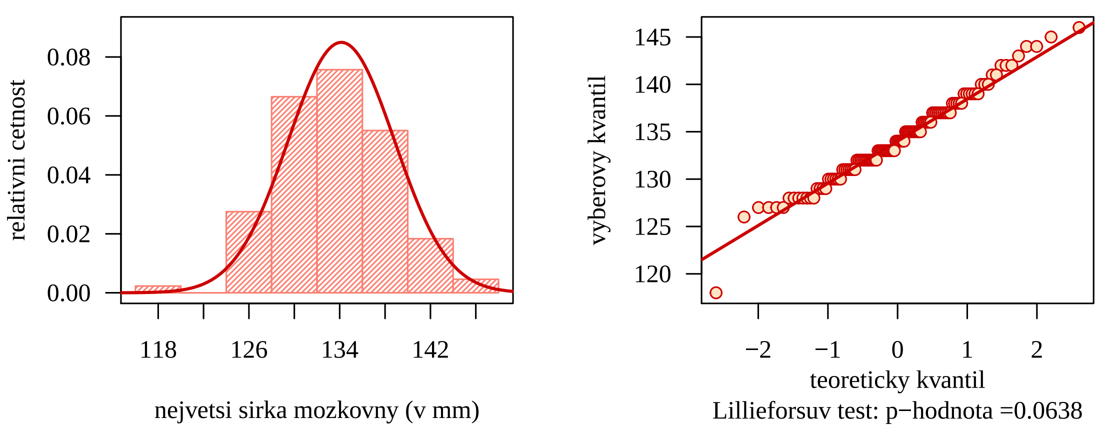
Řešení příkladu 7.4
Načteme datový soubor a z datové tabulky vybereme údaje o největší šířce mozkovny (skull.B) žen (sex == 'f'). Z vektoru hodnot následně odstraníme chybějící hodnoty a zjistíme rozsah náhodného výběru.

```
data <- read.delim('00-Data//01-one-sample-mean-skull-mf.txt')
skull.BF <- data[data$sex == 'f', 'skull.B']
skull.BF <- as.numeric(na.omit(skull.BF))
n <- length(skull.BF) # 109
```

Datový soubor obsahuje 109 údajů o největší šířce mozkovny žen starověké egyptské populace.

Naším úkolem je porovnat směrodatné odchylky dvou egyptských populací, přičemž u žen ze starověké egyptské populace máme k dispozici naměřené hodnoty. Na základě těchto hodnot můžeme zjistit, zda náhodný výběr pochází z normálního rozdělení. Oproti tomu novověká egypská populace je reprezentována pouze hodnotou aritmetického průměru ($m_f = 131.038\,\text{mm}$) a směrodatnou odchylkou ($s_f = 5.361\,\text{mm}$). O jejím rozdělení přesnější informace nemáme. Řešení příkladu tedy vede na situaci, kdy porovnáváme směrodatnou odchylku jednoho náhodného výběru s konkrétním číslem. K tomu po modifikaci nulové a alternativní hyotézy použijeme jednovýběrový test o rozptylu σ^2. Před použitím testu ovět ověříme splnění předpokladu o normalitě náhodného výběru největších šířek mozkovny žen starověké egyptské populace.

Předpoklad normality ověříme Lillieforsovým testem ($\alpha = 0.05$), kvantilovým diagramem a histogramem (obrázek 4). Datový soubor rozdělíme do osmi ekvidistatních intervalů s šířkou 4 mm prostřednictvím stanovených hranic $116, 120, \ldots, 148$.



Obrázek 4: Histogram a kvantilový diagram největší šířky mozkovny žen starověké egyptské populace

Protože p-hodnota $= 0.0638$ je větší než 0.05, nulovou hypotézu o normalitě dat nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Z histogramu na obrázku 4 vidíme, že naměřené hodnoty mají tvar charakteristický pro normální rozdělení, pouze jsou oproti teoretické křivce normálního rozdělení mírně posunuté doleva. Na kvantilovém diagramu je zřejmé odchýlení bodů od referenční křivky na levém chvostu. Podle Lillieforsova testu nemá toto odchýlení statisticky významný vliv na normální rozdělení náhodného výběru. Náhodný výběr největších šířek mozkovny žen ze starověké egyptské populace pochází z normálního rozdělení.

Jelikož náhodný výběr pochází z normálního rozdělení, můžeme hypotézu ze zadání otestovat pomocí parametrického testu. Naším úkolem je otestovat (nulovu) hypotézu, že směrodatná odchylka největší šířky mozkovny žen starověké egyptské populace je menší nebo rovna směrodatné odchylce největší šířky mozkovny žen novověké egyptské populace. Bez újmy na obecnosti můžeme znění téty hypotézy modifikovat na tvrzení o rozptylu, a sice: Rozptyl největší šířky mozkovny žen starověké egyptské populace je menší nebo rovnen rozptylu největší šířky mozkovny žen novověké egyptské populace. Alternativní hypotézu potom stanovíme jako doplněk nulové hypotézy.

1. **Stanovení hypotéz**
   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
     H_0 : *Rozptyl největší šířky mozkovny žen starověké egyptské populace je menší nebo rovnen rozptylu největší šířky mozkovny žen novověké egyptské populace.*
     H_1 : *Rozptyl největší šířky mozkovny žen starověké egyptské populace je větší než rozptyl největší šířky mozkovny žen novověké egyptské populace.*
   - **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
     $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$, kde $\sigma_0^2 = 5.361^2$
     $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$, kde $\sigma_0^2 = 5.361^2$ (pravostranná alternativa)
2. **Volba hladiny významnosti**
   - Hladinu významnosti volíme v souladu se zadáním jako $\alpha = 0.10$.
3. **Testování kritickým oborem**
   - **Testovací statistika**

$$F_W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(109-1)4.695991^2}{5.361^2} = \frac{108 \times 22.05233}{28.74032} = 82.86796 \doteq 82.8680.$$

```
alpha <- 0.05
sigma_0 <- 5.361
s  <- sd(skull.BF)
fw <- ((n - 1) * s ^ 2) / (sigma_0 ^ 2) # 82.86795
```

   - **Kritický obor**

$$\begin{aligned} W &= \left\langle \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)\,;\,\infty \right) \\ &= \left\langle \chi^2_{109-1}(1-0.10/2)\,;\,\infty \right) \\ &= \left\langle \chi^2_{108}(0.95)\,;\,\infty \right) \\ &= \langle 133.2569\,;\,\infty) \end{aligned}$$

```
qchisq(1 - alpha, n - 1) # 133.2569
```

   - **Závěr testování**
     Protože realizace testovací statistiky $f_W = 82.86795$ nenáleží do kritického oboru, tj. $f_W \notin W$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.10$.
4. **Testování intervalem spolehlivosti**

- **Interval spolehlivosti**

$$
\begin{aligned}
(d, \infty) &= \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha)}\,, \infty \right) \\
&= \left(\frac{(109-1)4.695991^2}{\chi^2_{109-1}(1-0.10)}\,, \infty \right) \\
&= \left(\frac{108 \times 22.05233}{\chi^2_{108}(0.90)}\,, \infty \right) \\
&= \left(\frac{2381.652}{133.2569}\,, \infty \right) \\
&= (17.87264\,, \infty)
\end{aligned}
$$

```
dh <- (n - 1) * s ^ 2 / qchisq(1 - alpha, n - 1) # 17.87264
```

- **Závěr testování**
  Protože $\sigma_0^2 = 5.361^2 = 28.7403$ náleží do Waldova 90% empirického pravostranného intervalu spolehlivosti, tj. $\sigma_0^2 = 28.7403 \in IS$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.10$.

5. **Testování p-hodnotou**

- **p-hodnota**

$$p\text{-hodnota} = 1 - \Pr(F_W \leq f_W) = 1 - \Pr(F_W \leq 82.86795) = 0.9654592 \doteq 0.9655$$

```
p.val <- 2 * min (pchisq(fw, n - 1), 1 - pchisq(fw, n - 1)) # 0.09957296
```

- **Závěr testování**
  Protože p-hodnota $= 0.9655$ je větší než $\alpha = 0.10$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.10$.

6. **Interpretace výsledků**
   Za základě všech tří typů testování nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Rozptyl největší šířky mozkovny žen starověké egyptské populace není statisticky významně větší než rozptyl největší šířky mozkovny žen novověké egyptské populace. Bez újmy na obecnosti můžeme tento závěr rozšířit na závěr o směrdatné odchylce: Směrodatná odchylka největší šířky mozkovny žen starověké egyptské populace není statisticky významně větší než směrodatná odchylka největší šířky mozkovny žen novověké egyptské populace.

Poznámka: Test o směrodatné odchylce σ můžeme, analogicky jako test o rozptylu σ^2, provést pomocí funkce varTest() s vstupním vektorem dat skull.BF a argumenty sigma.squared $= 5.361^2$, conf.level $= 0.90$ a alternative $=$ 'greater'.

```
EnvStats::varTest(skull.BF, sigma.squared = 5.361^2, conf.level = 0.90, alt = 'greater')
```

★

```

       Chi-Squared Test on Variance

data:  skull.BF
Chi-Squared = 82.868, df = 108, p-value = 0.9655
alternative hypothesis: true variance is greater than 28.74032
90 percent confidence interval:
 18.72205      Inf
sample estimates:
variance
22.05233
```

Příklad 7.5. Test o směrodatné odchylce σ
Mějme datový soubor 18-more-samples-variances-clavicle.txt a proměnnou cla.L popisující největší délku klíční kosti z pravé strany v mm (viz sekce **??**). Dále máme k dispozici údaje o největší délce klíční kosti z pravé strany mužů z populace severní Indie ($m_{nI} = 148.0$ mm, $s_{nI} = 8.60$ mm, $n_{nI} = 260$). Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte hypotézu, že směrodatná odchylka největší délky klíční kosti z pravé strany u mužů populace z Varanasi je větší nebo rovná směrodatné odchylce největší délky klíční kosti z pravé strany mužů populace severní Indie.

Řešení příkladu 7.5
Načteme datový soubor a vybereme z datové tabulky naměřené délky klíční kosti (cla.L) mužů populace z Varanasi (pop == 'ind2'). Nakonec z vektoru naměřených hodnot odstraníme chybějící údaje a zjistíme rozsah náhodného výběru.

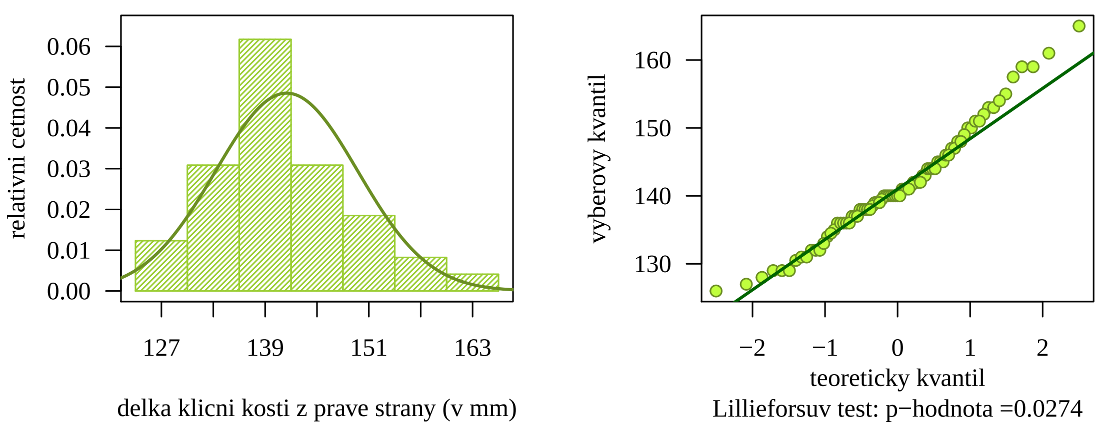
```
data <- read.delim('00-Data//18-more-samples-variances-clavicle.txt')
cla.LV <- data[data$pop == 'ind2', 'cla.L']
cla.LV <- as.numeric(na.omit(cla.LV))
n <- length(cla.LV) # 81
```

Datový soubor obsahuje údaje o délce klíční kosti z pravé strany u 81 mužů populace z Varanasi.

Naším úkolem ze zadání je porovnat směrodatné odchylky dvou indických populací, přičemž u mužů z populace z Varanasi známe naměřené hodnoty. Populace mužů ze severní Indie je naproti tomu reprezentována pouze hodnotou aritmetického průměru ($m_{nI} = 148.00$ mm) a směrodatnou odchylkou ($s_{nI} = 8.60$ mm).Řešení příkladu vede na případ, kdy směrodatnou odchylku (resp. rozptyl) jednoho náhodného výběru porovnáváme s konkrétním číslem, tedy na jednovýběrový test o rozptylu σ^2. Před použitím testu ověříme předpoklad normality náhodného výběru délek klíčních kostí z pravé strany u mužů ppulace z Varanasi.

Předpoklad normality ověříme Lillieforsovým testem ($\alpha = 0.05$), kvantilovým diagramem a histogramem (viz obrázek 5). Datový soubor rozdělíme do sedmi ekvidistatních intervalů s šířkou 6 mm prostřednictvím stanovených hranic $124, 130, \ldots, 166$.

```
[1] 0.2361389
```



Obrázek 5: Histogram a kvantilový diagram největší délky klíční kosti z pravé strany u mužů z populace z Varanasi

Protože p-hodnota $= 0.0274$ je menší než 0.05, nulovou hypotézu o normalitě dat zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Z histogramu na obrázku 5 vidíme posunutí histogramu doleva oproti křivce hustoty normálního rozdělení a výraznou špičatost náhodného výběru ($b_2 = 0.2361$).Na kvantilovém diagramu je zřejmá příchylnost bodů k referenční přímce pouze ve středové oblasti grafu. Všechny tyto aspekty podporují výsledek Lillieforsova testu. Náhodný výběr délek klíčních kostí z pravé strany u mužů z populace z Varanasi nepochází z normálního rozdělení.

Jelikož je předpoklad normality náhodného výběru není splněn, nemůžeme hypotézu o směrodatné odchylce uvedenou v zadání příkladu otestovat pomocí parametrického testu o rozptylu. ★

7.2 Test o parametru μ když σ^2 známe

Nechť $X_1, \dots X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 známe a μ_0 je konstanta. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujeme jednu z následujících tří hypotéz oproti příslušné alternativní hypotéze.

$H_{01}: \mu = \mu_0$	oproti	$H_{11}: \mu \neq \mu_0$	(oboustranná alt.)
$H_{02}: \mu \leq \mu_0$	oproti	$H_{12}: \mu > \mu_0$	(pravostranná alt.)
$H_{03}: \mu \geq \mu_0$	oproti	$H_{13}: \mu < \mu_0$	(levostranná alt.)

Test nazýváme jednovýběrový Z-test. Testovací statistika má tvar

$$Z_W = \frac{M - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}, \tag{7.2}$$

kde M je výběrový průměr, $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ je známá směrodatná odchylka, n je rozsah náhodného výběru a μ_0 je konstanta z nulové hypotézy. Za platnosti nulové hypotézy pochází statistika Z_W ze standardizovaného normálního rozdělení, tj.

$$Z_W = \frac{M - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \overset{H_0}{\sim} N(0, 1).$$

Kritický obor podle zvolené alternativní hypotézy má tvar

$H_{11}: \mu \neq \mu_0$	$W = \left(-\infty\,;\,u_{\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}\,;\,\infty\right)$
$H_{12}: \mu > \mu_0$	$W = \langle u_{1-\alpha}\,;\,\infty)$
$H_{13}: \mu < \mu_0$	$W = (-\infty\,;\,u_\alpha\rangle$

kde $u_{\alpha/2}$, $u_{1-\alpha/2}$, u_α, $u_{1-\alpha}$ jsou kvantily standardizovaného normálního rozdělení, jejichž hodnoty získáme pomocí softwaru R a implementované funkce `qnorm()`.

Interval spolehlivosti má podle zvolené alternativní hypotézy jeden z následujících tvarů

$H_{11}: \mu \neq \mu_0$	$(d, h) = \left(m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\,,\, m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$
$H_{12}: \mu > \mu_0$	$(d, \infty) = \left(m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}\,,\,\infty\right)$
$H_{13}: \mu < \mu_0$	$(-\infty, h) = \left(-\infty\,,\, m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\right)$

p-hodnota má v závislosti na zvolené alternativní hypotéze jeden z následujících tvarů

$H_{11}: \mu \neq \mu_0$	$p\text{-hodnota} = 2\min\{\Pr(Z_W \leq z_W)\,,\,\Pr(Z_W > z_W)\}$
$H_{12}: \mu > \mu_0$	$p\text{-hodnota} = \Pr(Z_W > z_W) = 1 - \Pr(Z_W \leq z_W)$
$H_{13}: \mu < \mu_0$	$p\text{-hodnota} = \Pr(Z_W \leq z_W)$

kde Z_W je náhodná veličina, z_W je realizace testovací statistiky Z_W (viz vzorec 7.2), tedy konkrétní číslo, a $\Pr(Z_W \leq z_W)$ je distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení, jejíž hodnotu získáme pomocí R a implementované funkce `pnorm()`.

Poznámka: Teorie k testu o parametru μ když σ^2 známe slouží zejména jako základ pro odvozování pokročilých testovacích statistik a intervalů spolehlivosti (zejména jde o skóre a věrohodnostní testy či intervaly spolehlivosti) nebo jako základ pro různé simulační studie. Ty využíváme k hlubšímu studiu testovacích statistik a jejich rozdělení, ke zkoumání aktuální hladiny významnosti nebo aktuální hodnoty koeficientu spolehlivosti a v mnoha dalších případech. Při analýze reálných dat tento test však nevyužíváme, jelikož skutečnou hodnotu parametru σ^2 neznáme. Proto dáváme přednost testu uvedenému v sekci 7.3, který neznalost skutečného rozptylu σ^2 zohledňuje. Protože však znalost testu o parametru μ když σ^2 známe patří k základnímu statistickému vzdělání, uvádíme zde alespoň jeden ilustrační příklad pro získání povědomí o tomto testu, jeho zkonstruování a použití.

Příklad 7.6. Test o μ když σ^2známe
Deklarovaná hmotnost jednoho balení hydroxidu sodného je 1 kg s povolenou odchylkou 0.01 kg (1 %). Po zakoupení 10 balení hydroxidu sodného byl zvážen obsah každého balení. Navážené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty hmotnosti deseti balení hydroxidu sodného

balení	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
hmotnost (kg)	1.0051	0.9880	0.9921	0.9933	0.9766	0.9976	0.9819	0.9992	1.0053	1.0066

Za předpokladu, že náhodná veličina X popisující hmotnost jednoho balení hydroxidu sodného pochází z normálního rozdělení se střední hodnotou $\mu = 1$ a rozptylem $\sigma^2 = 0.01^2$, tj. $X \sim N(1, 0.01^2)$ testujte hypotézu, že hmotnost jednoho balení hydroxidu sodného je rovna deklarovanému 1 kg. Hladinu významnosti zvolte $\alpha = 0.05$.

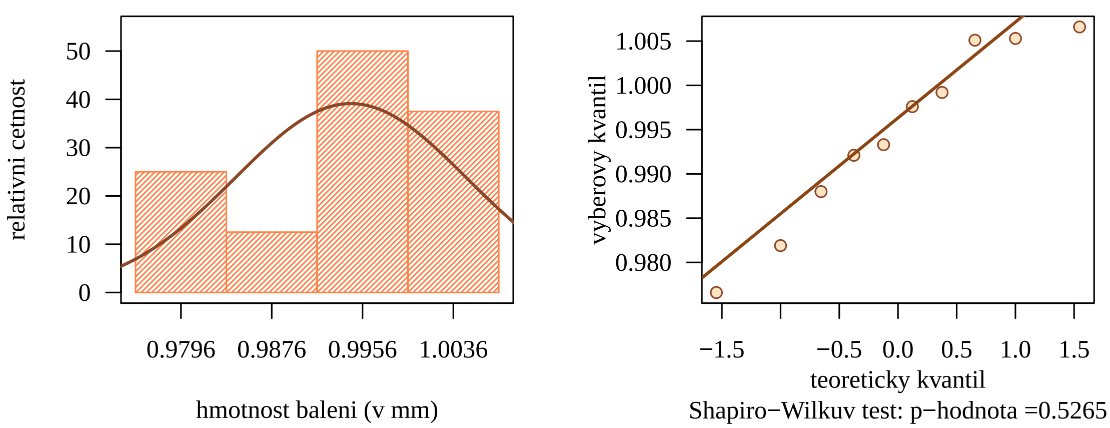
Řešení příkladu 7.6
Do proměnné weight si vložíme údaje z tabulky 1.

```
weight <- c(1.0051, 0.9880,  0.9921, 0.9933, 0.9766,
             0.9976, 0.9819, 0.9992, 1.0053, 1.0066)
n <- length(weight) # 10
```

K dispozici máme údaje o hmotnostech deseti balení hydroxidu sodného, jejichž hodnoty se pohybují v rozmezí 0.9766–1.0066 g.

Naším úkolem je porovnat hmotnost balíků hydroxidu sodného s deklarovanou hmotností 1 kg, což vede na test o střední hodnotě μ. Abychom mohli tento test použít, musíme nejprve ověřit normalitu náhodného výběru.

Vzhledem k nízkému rozsahu náhodného výběru použijeme na test o normalitě náhodného výběru Shapiro-Wilkův test ($\alpha = 0.05$). Dále vykreslíme hisogram a kvantilový diagram (obrázek 6). Datový soubor rozdělíme do čtyř ekvidistatních intervalů s šířkou 0.008 g prostřednictvím stanovených hranic $0.9756, 0.9836, \ldots, 1.0076$.



Obrázek 6: Histogram a kvantilový diagram hmotnosti balení hydroxidu draselného

Protože p-hodnota Shapiro-Wilkova testu, tj. 0.5265, je větší než 0.05, hypotézu o normalitě náhodného výběru nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Při pohledu na histogram bychom o normalitě náhodného výběru spíše pochybovali. Nezapomínejme však, že při takto malém rozsahu náhodného výběru může být tvar histogramu zavádějící. Při pohledu na kvantilový diagram jsme optimističtější. Vzhledem k malému počtu hodnot se body drží dostatečně blízko referenční přímky. Náhodný výběr naměřených hmotností balení hydroxidu sodného pochází z normálního rozdělení.

To, že náhodný výběr pochází z normálního rozdělení, je v souladu s předpokladem normálního rozdělení náhodné veličiny X. Proto budeme předpokládat, že toho rozdělení má deklarovaný rozptyl $\sigma^2 = 0.01$. Hypotézu ze zadání potom otestujeme pomocí parametrického testu o střední hodnotě μ, když rozptyl σ^2 známe. Naším úkolem je otestovat, zda je hmotnost jednoho balení hydroxidu sodného rovna deklarovanému 1 kg. Tato věta je zněním nulové hypotézy, neboť shoda implikuje rovnost a rovnost je vždy součástí nulové hypotézy. Alternativní hypotézu potom stanovíme jako doplněk k nulové hypotéze. Testování provedeme v posloupnosti sedmi kroků.

1. **Stanovení hypotéz**
   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
     H_0 : *Střední hodnota hmotnosti jednoho balení hydroxidu sodného je shodná s deklarovanou střední hodnotou jednoho balení hydroxidu sodného.*
     H_1 : *Střední hodnota hmotnosti jednoho balení hydroxidu sodného není shodná s deklarovanou střední hodnotou jednoho balení hydroxidu sodného.*
   - **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
     $H_0 : \mu = \mu_0$, kde $\mu_0 = 1$
     $H_1 : \mu \neq \mu_0$, kde $\mu_0 = 1$ (oboustranná alternativa)
2. **Volba hladiny významnosti**
   - Hladinu významnosti volíme v souladu se zadáním jako $\alpha = 0.05$.
3. **Testování kritickým oborem**
   - **Testovací statistika**

$$T_W = \frac{M - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{0.99457 - 1}{0.01}\sqrt{10} = \frac{-0.00543}{0.01} \times 3.162278 = -1.717117 \doteq -1.7171$$

```
mu0 <- 1
sigma <- 0.01
alpha <- 0.05
n <- length(weight)
m <- mean(weight)
zw <- (m - mu0) / sigma * sqrt(n) # -1.717117
```

   - **Kritický obor**

$$\begin{aligned} W &= \left(-\infty\,;\, u_{\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}\,;\, \infty\right) \\ &= \left(-\infty\,;\, u_{0.05/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-0.05/2}\,;\, \infty\right) \\ &= (-\infty\,;\, -1.959964\rangle \cup \langle 1.959964\,;\, \infty) \end{aligned}$$

```
qnorm(alpha / 2) # -1.959964
qnorm(1 - alpha / 2) # 1.959964
```

   - **Závěr testování**
     Protože realizace testovací statistiky $z_W = -1.7171$ nenáleží do kritického oboru, tj. $z_W \notin W$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.
4. **Testování intervalem spolehlivosti**

- **Interval spolehlivosti**

$$
\begin{aligned}
(d,h) &= \left(m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}\,,\, m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}\right) \\
&= \left(0.99457 - \frac{0.01}{\sqrt{10}} u_{1-0.05/2}\,,\, 0.99457 - \frac{0.01}{\sqrt{10}} u_{0.05/2}\right) \\
&= \left(0.99457 - \frac{0.01}{3.162278} u_{0.975}\,,\, 0.99457 - \frac{0.01}{3.162278} u_{0.025}\right) \\
&= (0.99457 - 0.003162277 \times 1.959964\,,\, 0.99457 - 0.003162277 \times (-1.959964)) \\
&= (0.9883721\,,\, 1.000768)
\end{aligned}
$$

```r
dh <- m - sigma / sqrt(n) * qnorm(1 - alpha / 2) # 0.988372
hh <- m - sigma / sqrt(n) * qnorm(alpha / 2) # 1.000768
```

- **Závěr testování**
  Protože $\mu_0 = 1$ náleží do Waldova 95% empirického oboustranného intervalu spolehlivosti, tj. $\mu_0 = 1 \in IS$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

5. **Testování p-hodnotou**

- **p-hodnota**

$$
\begin{aligned}
p\text{-hodnota} &= 2\min\{\Pr(Z_W \leq z_W)\,,\, \Pr(Z_W > z_W)\} \\
&= 2\min\{\Pr(Z_W \leq z_W)\,,\, 1 - \Pr(Z_W \leq z_W)\} \\
&= 2\min\{\Pr(Z_W \leq -1.717117)\,,\, 1 - \Pr(Z_W \leq -1.717117)\} \\
&= 2\min\{0.04297892\,,\, 0.9570211\} \\
&= 2 \times 0.04297892 = 0.08595784 \doteq 0.08596
\end{aligned}
$$

```r
p.val <- 2 * min (pnorm(zw), 1 - pnorm(zw)) # 0.08595784
```

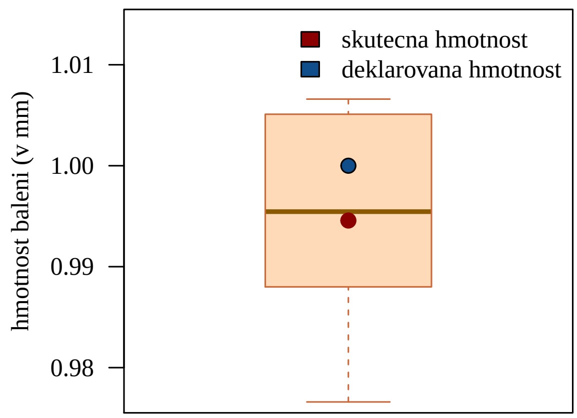
- **Závěr testování**
  Protože p-hodnota $= 0.08596$ je větší než $\alpha = 0.05$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

6. **Interpretace výsledků**
   Za základě všech tří typů testování nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Mezi skutečnou a deklarovanou hmotností balení hydroxidu draselného neexistuje statisticky významný rozdíl.

7. **Grafická vizualizace výsledku testování**
   Porovnání náhodného výběru s konstantou $\mu_0 = 1$ zobrazíme pomocí krabicového diagramu (viz obrázek 7).

```r
par(mar = c(2, 4, 1, 1), family = 'Times')
boxplot(weight, col = 'peachpuff1', ylim = c (0.977, 1.014),
        xlab = '', ylab = 'hmotnost baleni (v mm)', las = 1,
        medcol = 'orange4', border = 'sienna3')
points(mean(weight), bg = 'darkred', pch = 21, cex = 1.3, col = 'darkred')
points(1, bg = 'dodgerblue4', pch = 21, cex = 1.3, col = 'black')
legend('topright', fill = c('darkred', 'dodgerblue4'), bty = 'n',
       legend = c('skutecna hmotnost', 'deklarovana hmotnost'))
```

★



Obrázek 7: Krabicový diagram hmotnosti balení hydroxidu draselného

7.3 Test o parametru μ když σ^2 neznáme

Nechť $X_1, \dots X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 neznáme a μ_0 je konstanta. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujeme jednu z následujících tří hypotéz oproti příslušné alternativní hypotéze.

$$\begin{array}{lcll}
H_{01}: \mu = \mu_0 & \text{oproti} & H_{11}: \mu \neq \mu_0 & \text{(oboustranná alt.)} \\
H_{02}: \mu \leq \mu_0 & \text{oproti} & H_{12}: \mu > \mu_0 & \text{(pravostranná alt.)} \\
H_{03}: \mu \geq \mu_0 & \text{oproti} & H_{13}: \mu < \mu_0 & \text{(levostranná alt.)}
\end{array}$$

Test nazýváme jednovýběrový t-test. Testovací statistika má tvar

$$T_W = \frac{M - \mu_0}{S}\sqrt{n}, \tag{7.3}$$

kde M je výběrový průměr, S je výběrová směrodatná odchylka, n je rozsah náhodného výběru a μ_0 je konstanta z nulové hypotézy. Za platnosti nulové hypotézy pochází statistika T_W ze Studentova rozdělení o $n-1$ stupních volnosti, tj.

$$T_W = \frac{M - \mu_0}{S}\sqrt{n} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}.$$

Kritický obor podle zvolené alternativní hypotézy má tvar

$$\begin{array}{ll}
H_{11}: \mu \neq \mu_0 & W = (-\infty\,;\, t_{n-1}(\alpha/2)\rangle \cup \langle t_{n-1}(1-\alpha/2)\,;\,\infty) \\
H_{12}: \mu > \mu_0 & W = \langle t_{n-1}(1-\alpha)\,;\,\infty) \\
H_{13}: \mu < \mu_0 & W = (-\infty\,;\, t_{n-1}(\alpha)\rangle
\end{array}$$

kde $t_{n-1}(\alpha/2)$, $t_{n-1}(1-\alpha/2)$, $t_{n-1}(\alpha)$ a $t_{n-1}(1-\alpha)$ jsou kvantily Studentova rozdělení o $n-1$ stupních volnosti, jejichž hodnoty získáme pomocí R a implementované funkce `qt()`.

Interval spolehlivosti má podle zvolené alternativní hypotézy jeden z následujících tvarů

$$\begin{array}{ll}
H_{11}: \mu \neq \mu_0 & (d, h) = \left(m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha/2)\,,\, m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha/2)\right) \\
H_{12}: \mu > \mu_0 & (d, \infty) = \left(m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha)\,,\, \infty\right) \\
H_{13}: \mu < \mu_0 & (-\infty, h) = \left(-\infty\,,\, m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha)\right)
\end{array}$$

p-hodnota má v závislosti na zvolené alternativní hypotéze jeden z následujících tvarů

$$\begin{array}{ll}
H_{11}: \mu \neq \mu_0 & p\text{-hodnota} = 2\min\{\Pr(T_W \leq t_W)\,,\, \Pr(T_W > t_W)\} \\
H_{12}: \mu > \mu_0 & p\text{-hodnota} = \Pr(T_W > t_W) = 1 - \Pr(T_W \leq t_W) \\
H_{13}: \mu < \mu_0 & p\text{-hodnota} = \Pr(T_W \leq t_W)
\end{array}$$

kde T_W je náhodná veličina, t_W je realizace testovací statistiky T_W (viz vzorec 7.3), tedy konkrétní číslo, a $\Pr(T_W \leq t_W)$ je distribuční funkce Studentova rozdělení o $n-1$ stupních volnosti, jejíž hodnotu získáme pomocí R a implementované funkce `pt()`.

Poznámka: Princip testu o střední hodnotě μ když rozptyl σ^2 neznáme používáme také při analýze párových dat. Blíže se této situaci věnujeme v sekci 7.4.

Příklad 7.7. Test o střední hodnotě μ když σ^2 neznáme
Mějme datový soubor 18-more-samples-variances-clavicle.txt a proměnnou cla.L popisující největší délku klíční kosti z pravé strany v mm u mužů indické populace z Amritsaru (viz sekce **??**) naměřené v roce 1966. Dále máme k dispozici údaje ze studie (Kaur et al.) z roku 1997, v rámci které byly měřeny délky klíční kosti z pravé strany mužů ze severoindické populace ($m_R = 146.89\,\mathrm{mm}$, $s_R = 9.23\,\mathrm{mm}$, $n_R = 100$). Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ zjistěte, zda existuje rozdíl mezi největší délkou klíční kosti mužů indické populace z Armitsaru a mužů severoindické populace.

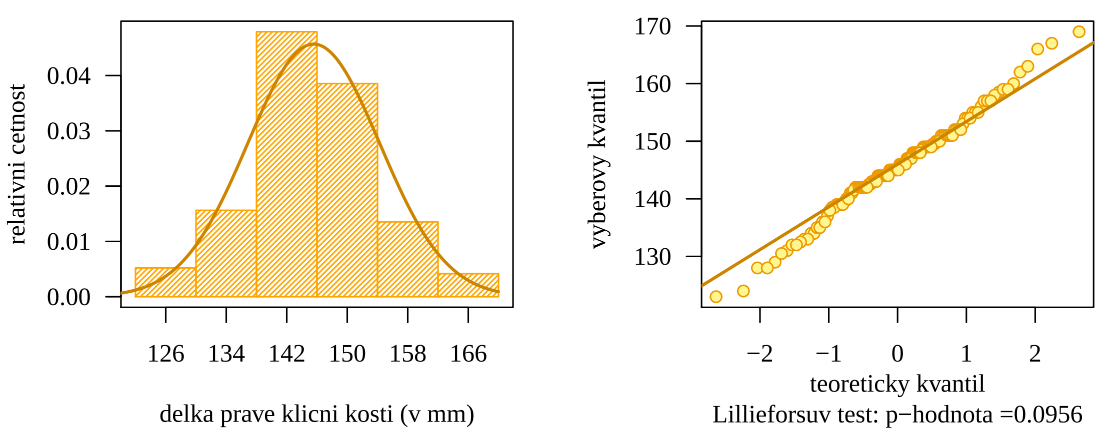
Řešení příkladu 7.7
Pomocí příkazu read.delim() načteme datový soubor a pomocí operátoru [] vybereme z datové tabulky údaje o největší délce klíční kosti z pravé strany (cla.L) u jedinců indické populace z Amritsaru (pop == 'ind1'). Z vektoru naměřených hodnot odstraníme chybějící údaje (na.omit()) zjistíme rozsah náhodného výběru (length().

```
data <- read.delim('00-Data//18-more-samples-variances-clavicle.txt')
cla.Li <- data[data$pop == 'ind1', 'cla.L']
cla.Li <- as.numeric(na.omit(cla.Li))
n <- length(cla.Li) # 120
```

Datový soubor obsahuje údaje o největší délce klíční kosti z pravé strany u 120 jedinců indické populace z Amritsaru.

Naším úkolem ze zadání je porovnat střední hodnoty dvou indických populací, přičemž u jedné populace (indická populace z Amritsaru) máme k dispozici naměřené hodnoty. Na základě těchto hodnot můžeme zjistit, zda náhodný výběr pochází z normálního rozdělení, tj. zda náhodná veličina X popisující největší délku klíční kosti z pravé strany u mužů indické populace v Amritsaru pochází z normálního rozdělení, tj. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde skutečný rozptyl σ^2 neznáme. Druhá populace (severoindická populace) je reprezentována pouze hodnotou aritmetického průměru ($m_R = 146.89\,\mathrm{mm}$) a směrodatnou odchylkou ($s_R = 9.23\,\mathrm{mm}$). O jejím rozdělení žádné další informace nemáme. Řešení příkladu tedy vede na situaci, kdy střední hodnotu jednoho náhodného výběru (jehož skutečnou hodnotu rozptylu neznáme) porovnáváme s konkrétním číslem, tedy na jednovýběrový test o střední hodnotě μ při neznámém rozptylu σ^2. Jediným předpokladem k použití tohoto testu je normalita náhodného výběru naměřených délek klíčních kostí. Před použitím testu tedy tento předpoklad ověříme.

Hladinu významnosti α pro test normality stanovíme standartně, tj. $\alpha = 0.05$. Protože rozsah náhodného výběru je větší než 30, ověříme předpoklad normality Lillieforsovým testem. Grafické ověření provedeme na základě kvantilového diagramu a histogramu superponovaného křivkou normálního rozdělení, jejíž parametry odhadneme pomocí výběrového průměru a výběrového rozptylu. Datový soubor rozdělíme do osmi ekvidistatních intervalů s šířkou 8 mm prostřednictvím stanovených hranic $122, 130, \ldots, 170$.



Obrázek 8: Histogram a kvantilový diagram délky pravé klíční kosti u mužů indické populace

Protože p-hodnota $= 0.0956$ je větší než 0.05, nulovou hypotézu o normalitě dat nezamítáme na hladině významnosti

$\alpha = 0.05$. Náhodný výběr největších délek klíčních kostí z pravé strany u jedinců indické populace z Amritsaru pochází z normálního rozdělení.

Protože náhodný výběr pochází z normálního rozdělení, můžeme hypotézu ze zadání otestovat pomocí parametrického testu o střední hodnotě μ když rozptyl σ^2 neznáme. Testování provedeme v posloupnosti sedmi kroků. Naším úkolem je zjistit, zda existuje rozdíl mezi největší délkou klíční kosti z pravé strany u mužů indické populace z Armitsaru a u mužů severoindické populace. Tato věta bude součástí alternativní hypotézy, neboť rozdíl implikuje nerovnost a nerovnost je vždy součástí alternativní hypotézy. Nulovou hypotézu potom stanovíme jako doplněk k alternativní hypotéze.

1. **Stanovení hypotéz**
   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
     H_0 : *Střední hodnota největší délky klíční kosti na pravé straně mužů indické populace z Amritsaru je shodná se střední hodnotou největší délky klíční kosti na pravé straně mužů severoindické populace.*
     H_1 : *Střední hodnota největší délky klíční kosti na pravé straně mužů indické populace z Amritsaru není shodná se střední hodnotou největší délky klíční kosti na pravé straně mužů severoindické populace.*
   - **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
     $H_0 : \mu = \mu_0$, kde $\mu_0 = 146.89$
     $H_1 : \mu \neq \mu_0$, kde $\mu_0 = 146.89$ (oboustranná alternativa)
2. **Volba hladiny významnosti**
   - Hladinu významnosti volíme v souladu se zadáním jako $\alpha = 0.05$.
3. **Testování kritickým oborem**
   - **Testovací statistika**

$$T_W = \frac{M - \mu_0}{S}\sqrt{n} = \frac{145.5667 - 146.89}{8.733432}\sqrt{120} = \frac{-1.3233}{8.733432} \times 10.95445 = -1.659831 \doteq -1.6598$$

```r
alpha <- 0.05
mu_0 <- 146.89
m  <- mean(cla.Li)
s  <- sd(cla.Li)
tw <- (m - mu_0) / s * sqrt(n) # -1.659873
```

   - **Kritický obor**

$$\begin{aligned} W &= (-\infty\,;\, t_{n-1}(\alpha/2)\rangle \cup \langle t_{n-1}(1-\alpha/2)\,;\,\infty) \\ &= (-\infty\,;\, t_{120-1}(0.05/2)\rangle \cup \langle t_{120-1}(1-0.05/2)\,;\,\infty) \\ &= (-\infty\,;\, t_{119}(0.025)\rangle \cup \langle t_{119}(0.975)\,;\,\infty) \\ &= (-\infty\,;\, -1.9801\rangle \cup \langle 1.9801\,;\,\infty) \end{aligned}$$

```r
qt(alpha/2, n - 1) # -1.9801
qt(1 - alpha/2, n - 1) # 1.9801
```

   - **Závěr testování**
     Protože realizace testovací statistiky $t_W = -1.6598$ nenáleží do kritického oboru, tj. $t_W \notin W$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.
4. **Testování intervalem spolehlivosti**

- **Interval spolehlivosti**

$$
\begin{aligned}
(d,h) &= \left(m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha/2)\,,\, m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha/2)\right) \\
&= \left(145.5667 - \frac{8.733432}{\sqrt{120}} t_{120-1}(1-0.05/2)\,,\, 145.5667 - \frac{8.733432}{\sqrt{120}} t_{120-1}(0.05/2)\right) \\
&= \left(145.5667 - \frac{8.733432}{10.95445} t_{119}(0.975)\,,\, 145.5667 - \frac{8.733432}{10.95445} t_{119}(0.025)\right) \\
&= (145.5667 - 0.7972497 \times 1.9801\,,\, 145.5667 - 0.7972497 \times (-1.9801)) \\
&= (143.9881\,,\, 147.1453)
\end{aligned}
$$

```
dh <- m - s / sqrt(n) * qt(1 - alpha / 2, n - 1) # 143.988
hh <- m - s / sqrt(n) * qt(alpha / 2, n - 1) # 147.1453
```

- **Závěr testování**
  Protože $\mu_0 = 146.89$ náleží do Waldova 95% empirického oboustranného intervalu spolehlivosti, tj. $\mu_0 = 146.89 \in IS$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

5. **Testování p-hodnotou**

- **p-hodnota**

$$
\begin{aligned}
p\text{-hodnota} &= 2\min\{\Pr(T_W \le t_W)\,,\, \Pr(T_W > t_W)\} \\
&= 2\min\{\Pr(T_W \le t_W)\,,\, 1 - \Pr(T_W \le t_W)\} \\
&= 2\min\{\Pr(T_W \le 146.89)\,,\, 1 - \Pr(T_W \le 146.89)\} \\
&= 2\min\{0.04978648\,,\, 0.9502135\} \\
&= 2 \times 0.04978648 = 0.09957296 \doteq 0.09957
\end{aligned}
$$

```
p.val <- 2 * min (pt(tw, n - 1), 1 - pt(tw, n - 1)) # 0.09957296
```

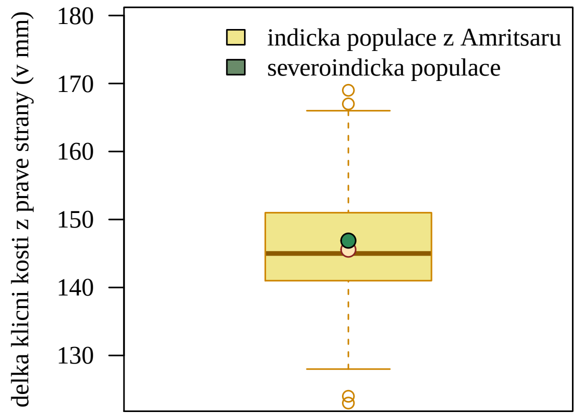
- **Závěr testování**
  Protože p-hodnota $= 0.09957$ je větší než $\alpha = 0.05$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

6. **Interpretace výsledků**
   Za základě všech tří typů testování nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Mezi střední hodnotou největší délky klíční kosti na pravé straně u mužů indické populace z Amritsaru a u mužů severoindické populace neexistuje statisticky významný rozdíl.

7. **Grafická vizualizace výsledku testování**
   Porovnání náhodného výběru s konstantou $\mu_0 = 146.89$ zobrazíme nejlépe pomocí krabicového diagramu (viz obrázek 9).

Poznámka: Test o střední hodnotě μ při neznámém rozptylu σ^2 můžeme provést pomocí funkce t.test(). Vstupními parametry budou vektor reprezentující náhodný výběr (cla.Li), hodnota parametru μ_0 z nulové hypotézy zadaná argumentem mu = 146.89, hodnota hladiny významnosti α zadaná prostřednictvím koeficientu spolehlivosti $1-\alpha$ nastavením hodnoty argumentu conf.level = 0.95 a typ zvolené alternativní hypotézy (oboustranná) zadaný pomocí argumentu alternative = 'two.sided'.

```
t.test(cla.Li, mu = 146.89, conf.level = 0.95, alternative = 'two.sided')
```



Obrázek 9: Krabicový diagram délky klíční kosti z pravé strany u mužů indické populace z Amritsaru a u mužů severoindické populace

```

        One Sample t-test

data:  cla.Li
t = -1.6599, df = 119, p-value = 0.09957
alternative hypothesis: true mean is not equal to 146.89
95 percent confidence interval:
 143.9880 147.1453
sample estimates:
mean of x
 145.5667
```

Součástí výstupu je hodnota testovací statistiky t = -1.6599, počet stupňů volnosti Studentova rozdělení df = 119, hranice 95% Waldova empirického oboustranného intervalu spolehlivosti 143.9880 a 147.1453 a p-hodnota p-value = 0.09957. Jediné, co musíme stanovit zvlášť, jsou dolní a horní hranice kritického oboru. ★

Příklad 7.8. Test o střední hodnotě μ když σ^2 neznáme
Mějme datový soubor 01-one-sample-mean-skull-mf.txt a proměnnou skull.B popisující největší šířku mozkovny mužů starověké egyptské populace (viz sekce **??**). Dále máme k dispozici údaje o největší šířce mozkovny novověké egyptské mužské populace ($m_m = 136.402\,\mathrm{mm}$, $s_m = 6.411\,\mathrm{mm}$, $n_m = 87$). Na hladině významnosti $\alpha = 0.01$ zjistěte, zda je šířka mozkovny starověké egyptské mužské populace větší než šířka mozkovny novověké egyptské mužské populace.

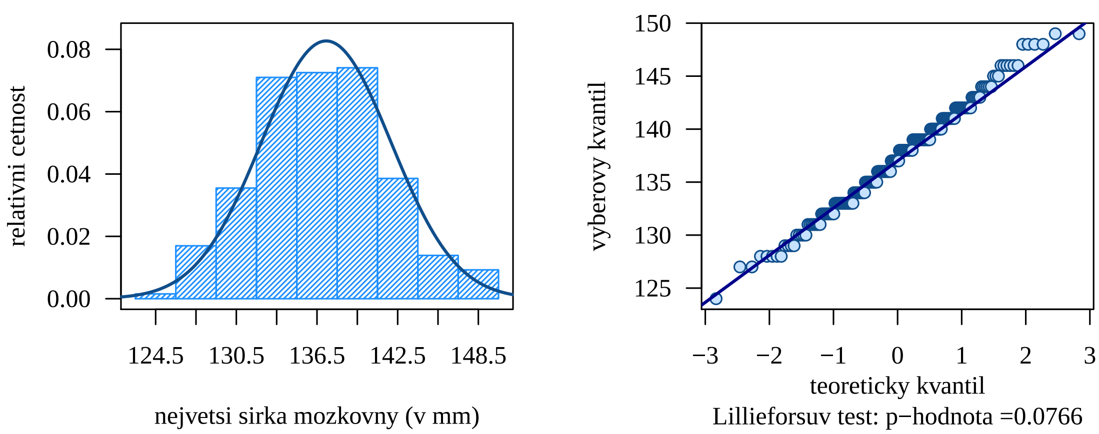
Řešení příkladu 7.8
Pomocí příkazu read.delim() načteme datový soubor a operátorem [] vybereme z datové tabulky údaje o největší šířce mozkovny (skull.B) mužů (sex == 'm'). Z vektoru naměřených údajů odstraníme příkazem na.omit() NA hodnoty a příkazem length() zjistíme rozsah náhodného výběru.

```
data <- read.delim('00-Data//01-one-sample-mean-skull-mf.txt')
skull.BM <- data[data$sex == 'm', 'skull.B']
skull.BM <- as.numeric(na.omit(skull.BM))
n <- length(skull.BM) # 216
```

Datový soubor obsahuje údaje o největší šířce mozkovny u 216 mužů starověké egyptské populace.

Naším úkolem ze zadání je porovnat šířku mozkovny mužů novověké a starověké egyptské populace. U starověké populace máme k dispozici naměřené hodnoty, pomocí kterých můžeme zjistit, zda náhodný výběr pochází z normálního rozdělení, tj. zda náhodná veličina X popisující největší šířku mozkovny mužů starověké egyptské populace pochází z normálního rozdělení, tj. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde skutečný rozptyl σ^2 neznáme. Druhá, novověká populace je reprezentována pouze aritmetickým průměrem ($m_m = 136.402\,\mathrm{mm}$) a směrodatnou odchylkou ($s_m = 6.411\,\mathrm{mm}$). O jejím rozdělení žádné další informace nemáme. Řešení příkladu vede na jednovýběrový test o střední hodnotě μ při neznámém rozptylu σ^2. Před použitím tohoto testu musíme nejprve ověřit vyžadovaný předpoklad normálního rozdělení náhodného výběru.

Protože rozsah náhodného výběru je větší než 30, ověříme předpoklad normality Lillieforsovým testem ($\alpha = 0.05$). Graficky zhodnotíme potenciální normalitu náhodného výběru kvantilovým diagramem a histogramem. Datový soubor rozdělíme do devíti ekvidistatních intervalů s šířkou 3 mm prostřednictvím stanovených hranic $123, 126, \ldots, 150$.



Obrázek 10: Histogram a kvantilový diagram délky pravé klíční kosti u mužů indické populace

Protože p-hodnota $= 0.0766$ je větší než 0.05, nulovou hypotézu o normalitě dat nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Z obrázku 10 je patrné, že histogram naměřencýh hodnot dostatečným způsobem kopíruje křivku hustoty normálního rozdělení a že body v kvantilovém diagramu se pohybují velmi blízko referenční křivky. Závěr tedy je, že náhodný výběr největších šířek mozkovny mužů starověké egyptské populace pochází z normálního rozdělení.

Protože náhodný výběr pochází z normálního rozdělení, můžeme hypotézu ze zadání otestovat pomocí parametrického testu o střední hodnotě μ když rozptyl σ^2 neznáme. Naším úkolem je zjistit, zda je šířka mozkovny starověké egyptské mužské populace větší než šířka mozkovny novověké egyptské mužské populace. Tato věta bude součástí alternativní hypotézy, nulová hypotéza bude potom doplňkem k alternativní hypotéze.

1. **Stanovení hypotéz**
   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
     H_0 : *Střední hodnota největší šířky mozkovny starověké egyptské mužské populace je menší nebo rovna střední hodnotě šířky mozkovny novověké egyptské mužské populace.*
     H_1 : *Střední hodnota největší šířky mozkovny starověké egyptské mužské populace je větší než střední hodnota šířky mozkovny novověké egyptské mužské populace.*
   - **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
     $H_0 : \mu \leq \mu_0$, kde $\mu_0 = 171.962$
     $H_1 : \mu > \mu_0$, kde $\mu_0 = 171.962$ (pravostranná alternativa)
2. **Volba hladiny významnosti**
   - Hladinu významnosti volíme podle zadání $\alpha = 0.01$.
3. **Testování kritickým oborem**
   - **Testovací statistika**

$$T_W = \frac{M - \mu_0}{S}\sqrt{n} = \frac{137.1852 - 136.402}{4.824642}\sqrt{216} = \frac{0.7832}{4.824642} \times 14.69694 = 2.385803 \doteq 2.3858$$

```
alpha <- 0.01
mu_0  <- 136.402
m   <- mean(skull.BM)
s   <- sd(skull.BM)
tw <- (m - mu_0) / s * sqrt(n) # 2.385757
```

   - **Kritický obor**

$$\begin{aligned} W &= \langle t_{n-1}(1-\alpha)\,;\,\infty) \\ &= \langle t_{216-1}(1-0.01)\,;\,\infty) \\ &= \langle t_{215}(0.99)\,;\,\infty) \\ &= \langle 1.6520\,;\,\infty) \end{aligned}$$

```
qt(1 - alpha, n - 1) # 2.343817
```

   - **Závěr testování**
     Protože realizace testovací statistiky $t_W = 2.385757$ náleží do kritického oboru, tj. $t_W \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.01$.
4. **Testování intervalem spolehlivosti**

- **Interval spolehlivosti**

$$
\begin{aligned}
(d,\ infty) &= \left(m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha/2)\,,\,\infty\right) \\
&= \left(137.1852 - \frac{4.824642}{\sqrt{216}} t_{216-1}(1-0.01/2)\,,\,\infty\right) \\
&= \left(137.1852 - \frac{4.824642}{14.69694} t_{215}(0.995)\,,\,\infty\right) \\
&= (137.1852 - 0.3282753 \times 2.343817\,,\,\infty) \\
&= (136.4158\,,\,\infty)
\end{aligned}
$$

```
dh <- m - s / sqrt(n) * qt(1 - alpha, n - 1) # 136.4158
```

- **Závěr testování**
  Protože $\mu_0 = 136.402$ nenáleží do Waldova 99% empirického levostranného intervalu spolehlivosti, tj. $\mu_0 = 136.402 \notin IS$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.09$.

5. **Testování p-hodnotou**

- **p-hodnota**

$$
p\text{-hodnota} = \Pr(T_W > t_w) = 1 - \Pr(T_W \leq t_W)) = 1 - \Pr(T_W \leq 136.402) \doteq 0.008956
$$

```
p.val <- 1 - pt(tw, n - 1) # 0.008955785
```

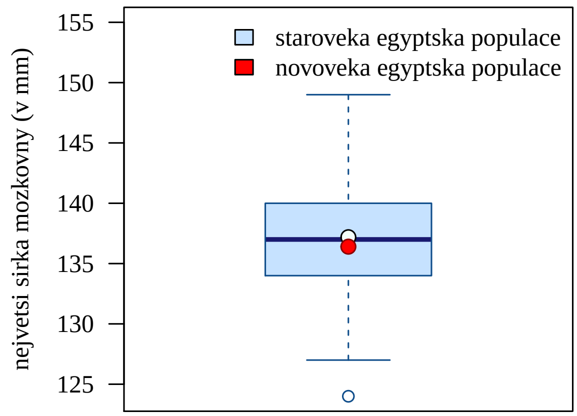
- **Závěr testování**
  Protože p-hodnota $= 0.008956$ je menší než $\alpha = 0.01$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.01$.

6. **Interpretace výsledků**
   Za základě všech tří typů testování zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti $\alpha = 0.01$. Největší šířka lebky starověké egyptské mužské populace je statisticky významně větší než největší šířka lebky novověké egyptské mužské populace.

7. **Grafická vizualizace výsledku testování**
   Rozdíl mezi starověkou a novověkou egyptskou mužskou populací zobrazíme krabicovým diagramem (viz obrázek 11).

```
par(mar = c(2, 4, 1, 1), family = 'Times')
boxplot(skull.BM, col = 'slategray1', xlab = '',
        xlab = '', ylab = 'nejvetsi sirka mozkovny (v mm)', las = 1,
        ylim = c(124, 155), medcol = 'midnightblue', border = 'dodgerblue4')
points(mean(skull.BM), bg = 'mintcream', pch = 21, cex = 1.3, col = 'black')
points(136.402, bg = 'red', pch = 21, cex = 1.3, col = 'red4')
legend('topright', fill = c('slategray1', 'red'), bty = 'n',
       legend = c('staroveka egyptska populace', 'novoveka egyptska populace'))
```

Poznámka: Test o střední hodnotě μ při neznámém rozptylu σ^2 můžeme provést pomocí funkce t.test(). Vstupními parametry budou vektor reprezentující náhodný výběr (skull.BM), hodnota parametru μ_0 z nulové hypotézy (mu = 136.402), hodnota hladiny významnosti α zadaná prostřednictvím koeficientu spolehlivosti $1 - \alpha$ (conf.level = 0.99) a typ zvolené alternativní hypotézy (alternative = 'greater').



Obrázek 11: Krabicový diagram největší šířky mozkovny mužů starověké a novověké egyptské populace

```

        One Sample t-test

data:  skull.BM
t = 2.3858, df = 215, p-value = 0.008956
alternative hypothesis: true mean is greater than 136.402
99 percent confidence interval:
 136.4158      Inf
sample estimates:
mean of x
 137.1852
```

```
t.test(skull.BM, mu = 136.402, conf.level = 0.99, alternative = 'greater')
```

Součástí výstupu je hodnota testovací statistiky t = 2.3858, počet stupňů volnosti Studentova rozdělení df = 215, hranice 99% Waldova empirického oboustranného intervalu spolehlivosti 136.4158 a Inf a p-hodnota p-value = 0.008956. Jediné, co musíme stanovit zvlášť, je dolní hranice kritického oboru. ★

Příklad 7.9. Test o střední hodnotě μ když σ^2 neznáme
Mějme datový soubor 11-two-samples-means-skull.txt a proměnnou skull.H popisující basion–bregmatickou výšku lebky žen starověké egyptské populace (viz sekce ??). Dále máme k dispozici údaje o basion–bregmatické výšce lebky žen novověké egyptské populace ($m_f = 126.942\,\mathrm{mm}$, $s_f = 4.430\,\mathrm{mm}$, $n_f = 52$). Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte hypotézu, že basion–bregmatická výška lebky žen starověké egyptské populace je větší nebo rovna basion–bregmatické výšce lebky žen novověké egyptské populace.

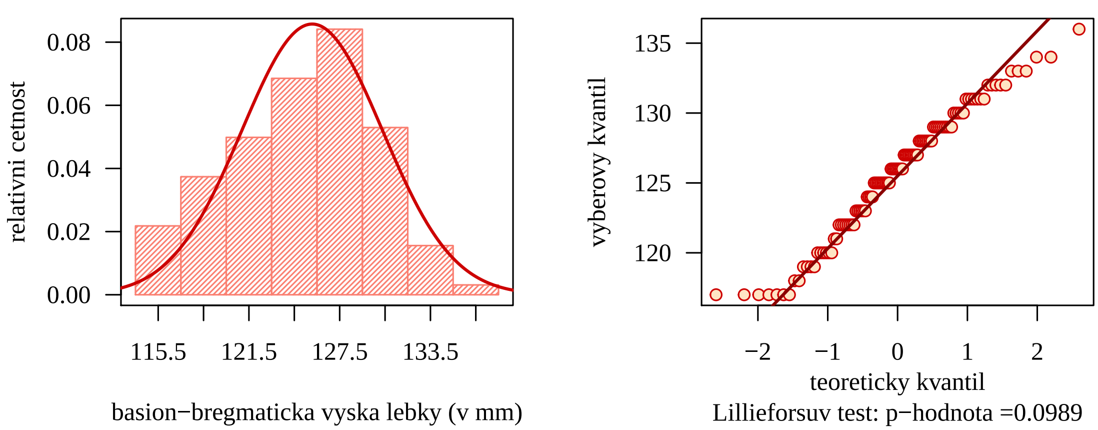
Řešení příkladu 7.9
Nejprve načteme datový soubor a vybereme z datové tabulky údaje o basion–bregmatické výšce lebky (skull.H) žen (sex == 'f'). Z vektoru naměřených hodnot odstraníme chybějící údaje a zjistíme počet naměřených hodnot.

```
data <- read.delim('00-Data//11-two-samples-means-skull.txt')
skull.HF <- data[data$sex == 'f', 'skull.H']
skull.HF <- as.numeric(na.omit(skull.HF))
n <- length(skull.HF) # 107
```

Datový soubor obsahuje naměřené hodnoty basion–bregmatické výšky lebky 107 žen starověké egyptské populace.

Naším úkolem je porovnat výšku lebky žen dvou egyptských populací. U starověké populace máme k dispozici naměřené hodnoty, pomocí kterých můžeme zjistit, zda náhodný výběr pochází z normálního rozdělení, kde skutečný rozptyl σ^2 neznáme. Druhá, novověká populace je reprezentována pouze aritmetickým průměrem ($m_f = 126.942\,\mathrm{mm}$) a směrodatnou odchylkou ($s_f = 4.430\,\mathrm{mm}$). O jejím rozdělení žádné další údaje nemáme. Řešení příkladu vede na jednovýběrový test o střední hodnotě μ při neznámém rozptylu σ^2. Před použitím tohoto testu musíme ověřit předpoklad normality náhodného výběru.

Protože rozsah náhodného výběru je větší než 30, ověříme normální rozdělení náhodného výběru Lillieforsovým testem ($\alpha = 0.05$). Graficky zhodnotíme rozdělení náhodného výběru kvantilovým diagramem a histogramem (viz obrázek 12). Datový soubor rozdělíme do osmi ekvidistatních intervalů s šířkou 3 mm prostřednictvím stanovených hranic $114, 117, \ldots, 138$.



Obrázek 12: Histogram a diagram basion–bregmatické výšky lebky žen starověké a novověké egyptské populace

Protože p-hodnota $= 0.0989$ je větší než 0.05, nulovou hypotézu o normalitě dat nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Z obrázku 12 vidíme, že histogram naměřených hodnot je oproti křivce hustoty normálního rozdělení mírně posunutý doprava. Taktéž v kvantilovém diagramu vidíme, že body umístěné na koncích se vzdalují od referenční křivky. Naštěstí tyto odchylky nejsou tak závažné, aby fatálně narušily normální rozdělení datového souboru. Náhodný výběr basion-bregmatické výšky lebky žen starověké egyptské populace tedy pochází z normálního rozdělení.

Protože náhodný výběr naměřených hodnot splňuje předpoklad normality, můžeme hypotézu ze zadání otestovat pomocí parametrického testu o střední hodnotě μ když rozptyl σ^2 neznáme. V zadání příkladu máme tentokrát přímo uvedené znění nulové hypotézy. Zbývá tedy dodefinovat alternativní hypotézu tak, aby byla doplňkem k nulové hypotéze.

1. **Stanovení hypotéz**

   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
     H_0 : *Střední hodnota basion–bregmatické výšky lebky žen starověké egyptské populace je větší nebo rovna střední hodnotě basion–bregmatické výšky lebky žen novověké egyptské populace.*
     H_1 : *Střední hodnota basion–bregmatické výšky lebky žen starověké egyptské populace je menší než střední hodnota basion–bregmatické výšky lebky žen novověké egyptské populace.*
   - **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
     $H_0 : \mu \geq \mu_0$, kde $\mu_0 = 126.942$
     $H_1 : \mu < \mu_0$, kde $\mu_0 = 126.942$ (levostranná alternativa)

2. **Volba hladiny významnosti**

   - Hladinu významnosti volíme v souladu se zadáním jako $\alpha = 0.05$.

3. **Testování kritickým oborem**

   - **Testovací statistika**

$$T_W = \frac{M - \mu_0}{S}\sqrt{n} = \frac{125.6822 - 126.942}{4.653256}\sqrt{107} = \frac{-1.2598}{4.653256} \times 10.34408 = -2.800506 \doteq -2.8005$$

```
alpha <- 0.05
mu_0 <- 126.942
m  <- mean(skull.HF)
s  <- sd(skull.HF)
tw <- (m - mu_0) / s * sqrt(n) # -2.80041
```

   - **Kritický obor**

$$\begin{aligned} W &= (-\infty\,;\, t_{n-1}(\alpha)\rangle \\ &= (-\infty\,;\, t_{107-1}(0.05)\rangle \\ &= (-\infty\,;\, -1.659356\rangle \end{aligned}$$

```
qt(alpha, n - 1) # -1.659356
```

   - **Závěr testování**
     Protože realizace testovací statistiky $t_W = -2.8005$ náleží do kritického oboru, tj. $t_W \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

4. **Testování intervalem spolehlivosti**

- **Interval spolehlivosti**

$$\begin{aligned}(-\infty; h) &= \left(-\infty\,,\, m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha)\right)\\ &= \left(-\infty\,,\, 125.6822 - \frac{4.653256}{\sqrt{107}} t_{107-1}(0.05)\right)\\ &= \left(-\infty\,,\, 125.6822 - \frac{4.653256}{10.34408} t_{106}(0.05)\right)\\ &= (-\infty\,,\, 125.6822 - 0.4498473 \times (-1.659356))\\ &= (-\infty\,,\, 126.4287)\end{aligned}$$

```
hh <- m - s / sqrt(n) * qt(alpha, n - 1) # 126.4287
```

- **Závěr testování**
  Protože $\mu_0 = 126.942$ nenáleží do Waldova 95% empirického pravostranného intervalu spolehlivosti, tj. $\mu_0 = 126.942 \notin IS$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

5. **Testování p-hodnotou**

- **p-hodnota**

$$p\text{-hodnota} = \Pr(T_W \leq t_W) = \Pr(T_W \leq -2.80041) = 0.003033381 \doteq 0.003033$$

```
p.val <- pt(tw, n - 1) # 0.003033381
```

- **Závěr testování**
  Protože p-hodnota $= 0.003033$ je menší než $\alpha = 0.05$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

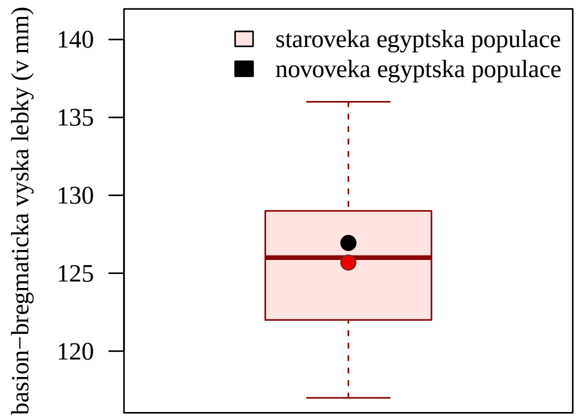
6. **Interpretace výsledků**
   Za základě všech tří typů testování zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Basion-bregmatická výška lebky žen starověké egyptské populace je statisticky významně menší než basion-bregmatická výška lebky žen novověké egyptské populace.

7. **Grafická vizualizace výsledku testování**
   Rozdíl středních hodnot basion–bregmatické výšky lebky žen obou populací zobrazíme pomocí krabicového diagramu (viz obrázek 13).

Poznámka: Test o střední hodnotě μ při neznámém rozptylu σ^2 můžeme provést pomocí funkce t.test() s argumentty mu = 126.942, conf.level = 0.95 a alternative = 'less'.

```
t.test(skull.HF, mu = 126.942, conf.level = 0.95, alternative = 'less')
```

Součástí výstupu je hodnota testovací statistiky t = -2.8004, počet stupňů volnosti Studentova rozdělení df = 106, hranice 95% Waldova empirického oboustranného intervalu spolehlivosti -Inf a 126.4287 a p-hodnota p-value = 0.003033. Jediné, co musíme stanovit zvlášť, je horní hranice kritického oboru. ★



Obrázek 13: Krabicový diagram basion–bregmatické výšky lebky žen starověké a novověké egyptské populace

```

        One Sample t-test

data:  skull.HF
t = -2.8004, df = 106, p-value = 0.003033
alternative hypothesis: true mean is less than 126.942
95 percent confidence interval:
     -Inf 126.4287
sample estimates:
mean of x
 125.6822
```

Příklad 7.10. Test o střední hodnotě μ když σ^2 neznáme
Mějme datový soubor 15-anova-means-skull.txt a proměnnou upface.H popisující výšku horní části tváře mužů německé populace (viz sekce **??**). Dále máme k dispozici údaje o výšce horní části tváře mužů Černjachovské kultury z území dnešní Ukrajiny ($m_{ck} = 70.00\,\text{mm}$, $n_{ck} = 99$). Na hladině významnosti $\alpha = 0.10$ testujte hypotézu, že výška horní části tváře německé mužské populace je menší nebo rovna výšce horní části tváře mužské populace z Černjachovské kultury.

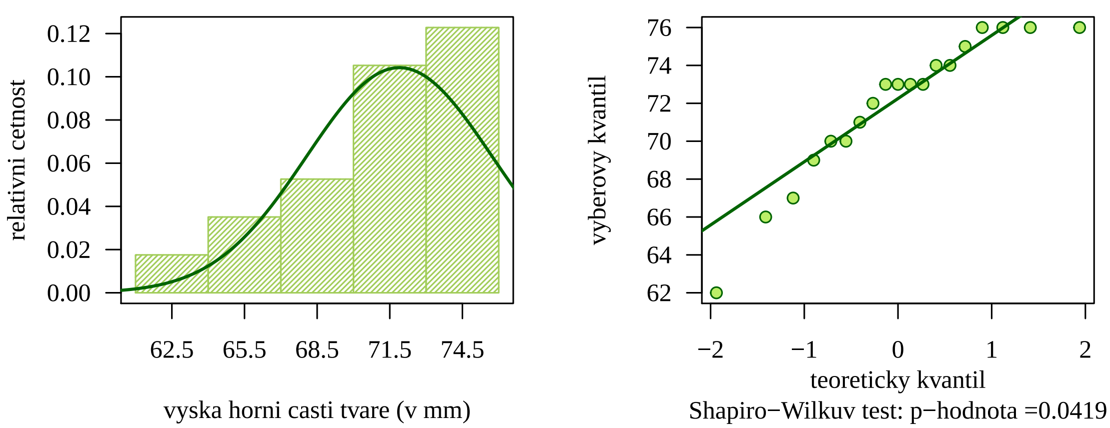
Řešení příkladu 7.10
Nejprve načteme datový soubor a z datové tabulky vybereme údaje o výšce horní části tváře (upface.H) mužů německé populace (pop == 'nem'). Dále z vektoru naměřených hodnot odstraníme NA hodnoty a zjistíme rozsah náhodného výběru.

```
data <- read.delim('00-Data//15-anova-means-skull.txt')
upface.HN <- data[data$pop == 'nem', 'upface.H']
upface.HN <- as.numeric(na.omit(upface.HN))
n <- length(upface.HN) # 19
```

Datový soubor obsahuje údaje o výškách horní části tváře 19 mužů německé populace.

Naším úkolem je porovnat výšku horní části tváře u mužů ze dvou různých populací. U německé populace známe naměřené hodnoty, pomocí kterých můžeme zjistit, zda náhodný výběr pochází z normálního rozdělení s nám neznámým rozptylem σ^2. U mužské populace z Černjachovské kultury známe pouze aritmetickým průměr ($m_{ck} = 70.00\,\text{mm}$). Rozdělení náhodného výběru, na základě kterého byly publikované statistiky získány, nám není známé. Řešení příkladu vede na jednovýběrový test o střední hodnotě μ při neznámém rozptylu σ^2. Před použitím tohoto testu ověříme předpoklad normality náhodného výběru.

Protože rozsah náhodného výběru výšek horní části tváře mužů německé populace je menší než 30, ověříme normalitu tohoto náhodného výběru Shapiro-Wilkovým testem ($\alpha = 0.05$). Graficky zhodnotíme rozdělení náhodného výběru kvantilovým diagramem a histogramem (viz obrázek 14). Datový soubor rozdělíme do pěti ekvidistatních intervalů s šířkou 3 mm prostřednictvím stanovených hranic $61, 64, \ldots, 76$.



Obrázek 14: Histogram a diagram výšky horní části tváře mužů německé populace

Protože p-hodnota $= 0.0419$ je menší než 0.05, nulovou hypotézu o normalitě dat zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Z obrázku 14 vidíme, že histogram naměřených hodnot nekopíruje tvar křivky hustoty normálního rozdělení. Odchylka nastává zejména na pravém konci, kde oproti očekávání nedochází ke snížení počtu hodnot. Kvantilový diagram vizualizuje odlehlost bodů od referenční přímky na pravém i na levém chvostu. Náhodný výběr výšky horní části tváře mužů německé populace tedy nepochází z normálního rozdělení.

Protože náhodný výběr naměřených výšek horní části tváře mužů německé populace nesplňuje předpoklad normality, nemůžeme k otestování hypotézy ze zadání použít parametrický test o střední hodnotě μ když rozptyl σ^2 neznáme. Hypotézu bychom otestovali vhodnou metodou z kapitoly **??**.

★

7.4 Párový test

Nechť $(X_1,Y_1)^T \dots (X_n,Y_n)^T$ je náhodný výběr z $N_2(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$, kde $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2)^T$ a $\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$, přičemž μ_1 je střední hodnota náhodné veličiny X, μ_2 je střední hodnota náhodné veličiny Y, σ_1^2 je rozptyl náhodné veličiny X, σ_2^2 je rozptyl náhodné veličiny Y a ρ je korelační koeficient. Potom náhodný výběr $Z=(Z_1,\dots,Z_n)^T$, kde $Z_i = Y_i - Y_i,\ i = 1,\dots,n$, pochází z normálního rozdělení se střední hodnotou $\mu=\mu_1-\mu_2$ a rozptylem $\sigma^2=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}$, tj. $Z\sim N(\mu,\sigma^2)=N(\mu_1-\mu_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2})$. Na hladině významnosti α testujeme jednu z následujících tří hypotéz oproti příslušné alternativní hypotéze.

$H_{01}:\mu=\mu_0$	oproti	$H_{11}:\mu\neq\mu_0$	(oboustranná alt.)
$H_{02}:\mu\leq\mu_0$	oproti	$H_{12}:\mu>\mu_0$	(pravostranná alt.)
$H_{03}:\mu\geq\mu_0$	oproti	$H_{13}:\mu<\mu_0$	(levostranná alt.)

kde μ je střední hodnota rozdílů $Z_1,\dots,Z_n$ a μ_0 je konstanta, jejíž hodnotu nejčastěji volíme jako $\mu_0=0$. Tato volba odpovídá hypotéze, že rozdíl mezi X a Y neexistuje (resp. hypotéze, že střední hodnota náhodné veličiny X je menší, resp. větší, než střední hodnota náhodné veličiny Y). Vzhledem k tomu, že jde o test hypotézy o parametru μ, přičemž skutečná hodnota rozptylu σ^2 rozdílů $Z_1,\dots,Z_n$ není známá, testujeme hypotézy o střední hodnotě rozdílu $X-Y$ pomocí jednovýběrového t-testu, analogicky jako je uvedeno v sekci 7.3.

Výše popsaný test, v rámci kterého převádíme problém porovnávání dvou náhodných veličin X a Y na problém srovnávání jejich rozdílů Z s konstantou μ_0 a následně jej řešíme pomocí jednovýběrového t-testu, nazýváme párový Studentův t-test.

Poznámka: Jak již bylo zmíněno v úvodu kapitoly, předpokladem k použití parametrického párového testu je normální rozdělení rozdílů $X-Y$, tj. normální rozdělení náhodné veličiny Z. V praxi bývá často tento předpoklad mylně zaměňován s předpokladem normality náhodné veličiny X a předpokladem normality náhodné veličiny Y. Otestování předpokladu normality zvlášť pro každý z obou náhodných výběrů je však hrubá chyba ukazující na nepochopení základního principu párového testu.

Poznámka: Jak napovídá název testu, nejčastější realizace párového testu je v situacích, kdy na jednom jedinci porovnáváme sledovaný párový znak ze dvou stran. Typickým příkladem je například porovnání délkových nebo šířkových rozměrů na pravé a levé straně těla jedince (porovnání délky pravé a levé klíční kosti, porovnání míry přilehlosti ušního lalůčku na pravé a levé straně nebo porovnání 2D:4D poměru na pravé a levé ruce).

Trochu netypickým ale i tak dobře fungujícím příkladem využití párového testu může být také porovnání sledovaného znaku u sourozenců (resp. dvojčat). Sledovaný znak u mladšího a staršího sourozence (dvojčete) považujeme též za párový případ, kdy subjektem spojujícím "obě strany"párového znaku je společná matka obou sourozenců (konkrétně si uveďme kupříkladu porování porodní hmotnosti staršího a mladšího dvojčete, porovnání výše inteligenčního kvocientu osmiletých dvojčat, nebo porovnání výšky v 15 letech u staršího a mladšího sourozence).

V neposlední řadě používáme párový test na porovnání měření téhož znaku na týž jedincích dvěma různými výzkumníky, tedy na zjištění interindividuální chyby měření, nebo na porovnání dvou opakovaných měření téhož znaku na týchž jedincích jedním výzkumníkem, tedy na zjištění intraindividuální chyby měření. V obou případech je subjektem spojujícím "obě strany"párového testu jedinec, na kterém byla opakovaná měření (ať už jedním výzkumníkem dvakrát, nebo dvěma výzkumníky jednou) provedena.

Příklad 7.11. Párový test
Máme datový soubor 02-paired-means-clavicle.txt obsahující údaje o hodnotách vertikálního průměru středu délky těla klíční kosti z pravé a levé strany (*clavicula*) z pohřebiště u Sv. Jakuba v Brně, převážně z období středověku, naměřené jedním výzkumníkem ve dvou opakovaných měřeních (hodnoty naměřené při prvním opakování jsou uloženy v proměnné simd.1, hodnoty naměřené při druhém opakování jsou uloženy v proměnné simd.2) a naměřené druhým výzkumníkem v jednom měření (simd). Více informací viz sekce **??**. Na hladině významnosti $\alpha = 0.01$ testujte hypotézu o shodě střední hodnoty měření vertikálního průměru středu délky těla klíční kosti na levé straně provedené prvním a druhým výzkumníkem.

Řešení příkladu7.11
Nejprve příkazem read.delim() načteme datový soubor a pomocí operátoru [] z něj vybereme pouze údaje naměřené prvním výzkumníkem (sloupce simd.1 a simd.2) a druhým výzkumníkem (simd) na pravé straně side == 'R'. Údaje vložíme do proměnné data.12R. Z datové tabulky následně odstraníme chybějící údaje a zjistíme rozsah náhodného výběru.

```
data <- read.delim('00-Data\\02-paired-means-clavicle.txt')
data.12L <- data[data$side == 'L', c('simd.1', 'simd.2', 'simd')]
data.12L <- na.omit(data.12L)
dim(data.12L) # 38x3
```

Datový soubor obsahuje 38 opakovaných měření vertikálního průměru středu délky těla klíční kosti z levé strany, a to dvakrát prvním výzkumníkem a jedenkrát druhým výzkumníkem. Nyní pomocí funkce apply() vytvoříme z obou měření prvního výzkumníka aritmetické průměry (simd.AL), které budeme následně porovnávat s naměřenými údaji druhého výzkumníka (simd.BL).

```
simd.AL <- apply(data.12L[, c('simd.1', 'simd.2')], 1, mean)
simd.BL <- data.12L$simd
```

Naším úkolem ze zadání je porovnat měření provedená dvěma různými výzkumníky. Jde ale o měření stejného znaku sledovaného na stejných subjektech, proto je vhodné použít na tuto situaci párový test. Prvním krokem k provedení tohoto testu je vytvoření rozdílů hodnot naměřených prvním a druhým výzkumníkem. V druhém kroku je potřeba ověřit jediný předpoklad, který musí být splněn, abychom mohli párový test provést, a sice ověřit normální rozdělení těchto rozdílů.

Vzhledem k rozsahu náhodného výběru ($n = 39 > 30$) použijeme k ověření normality rozdílů Lillieforsův test ($\alpha = 0.05$). Graficky zhodnotíme rozdělení náhodného výběru kvantilovým diagramem a histogramem (viz obrázek 15). Datový soubor rozdělíme do šesti ekvidistatních intervalů s šířkou 0.51 mm prostřednictvím stanovených hranic $-2.195, -2.405, \ldots, 0.865$.

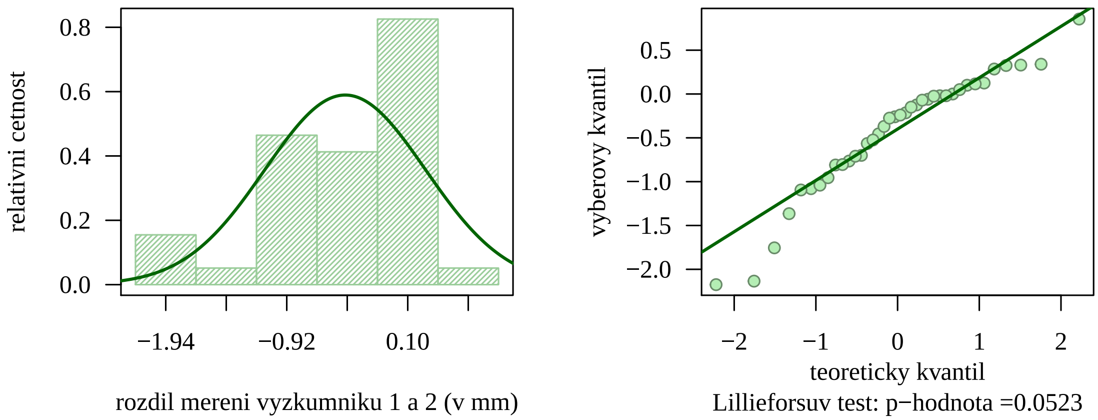
```
simd.ABL <- simd.AL - simd.BL
nortest::lillie.test(simd.ABL)$p.val # 0.05234526
```

Protože p-hodnota = 0.0523 je větší než 0.05, nulovou hypotézu o normalitě dat nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Z grafů vidíme, že normalita náhodného výběru není příliš přesvědčivá, však jsme byli pouze kousek k zamítnutí hypotézy o normálním rozdělení náhodného výběru. Lillierofsův test však přiklonil zrníčko vah směrem k normálnímu rozdělení, proto v souladu s výsledkem testu předpoklad normality výběru rozdílů hodnot měření obou výzkumníků nezamítáme.

Předpoklad normality pro použití parametrického testu je tedy splněn. Naším úkolem je otestovat (nulovou) hypotézu o shodě střední hodnoty měření prvního a druhého výzkumníka. Tento problém jsme převedli na analogický problém, kdy porovnáváme střední hodnotu rozdílů měření prvního a druhého výzkumníka s konstantou $\mu_0 = 0$. Původní i analogické tvrzení jsou zněním nulové hypotézy. Zbývá dodefinovat alternativní hypotézu. Proces testování si předvedeme v posloupnosti sedmi kroků.

1. **Stanovení hypotéz**

   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy



Obrázek 15: Histogram a diagram rozdílů měření prvního a druhého výzkumníka hodnot vertikálního průměru ve středu délky těla klíční kosti na levé straně

H_0 : *Střední hodnota rozdílů měření prvního a druhého výzkumníka je rovná nule.*
H_1 : *Střední hodnota rozdílů měření prvního a druhého výzkumníka není rovná nule.*

- **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
  $H_0 : \mu = \mu_0$, kde $\mu_0 = 0$
  $H_1 : \mu \neq \mu_0$, kde $\mu_0 = 0$ (oboustranná alternativa)

2. **Volba hladiny významnosti**

- Hladinu významnosti volíme v souladu se zadáním jako $\alpha = 0.01$.

3. **Testování kritickým oborem**

- **Testovací statistika**

$$T_W = \frac{M - \mu_0}{S}\sqrt{n} = \frac{-0.4273684 - 0}{0.6768715}\sqrt{38} = \frac{-0.4273684}{0.6768715} \times 6.164414 = -3.892136 \doteq -3.8921$$

```
alpha <- 0.01
mu_0 <- 0
m   <- mean(simd.ABL)
s   <- sd(simd.ABL)
tw <- (m - mu_0) / s * sqrt(n) # -3.892136
```

- **Kritický obor**

$$\begin{aligned} W &= (-\infty\,;\, t_{n-1}(\alpha/2)\rangle \cup \langle t_{n-1}(1-\alpha/2)\,;\,\infty) \\ &= (-\infty\,;\, t_{38-1}(0.01/2)\rangle \cup \langle t_{38-1}(1-0.01/2)\,;\,\infty) \\ &= (-\infty\,;\, t_{37}(0.005)\rangle \cup \langle t_{37}(0.995)\,;\,\infty) \\ &= (-\infty\,;\, -2.7154\rangle \cup \langle 2.7154\,;\,\infty) \end{aligned}$$

```
qt(alpha / 2, n - 1) # -2.715409
qt(1 - alpha / 2, n - 1) # 2.715409
```

- **Závěr testování**
  Protože realizace testovací statistiky $t_W = -3.8921$ náleží do kritického oboru, tj. $t_W \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.01$.

4. **Testování intervalem spolehlivosti**

   - **Interval spolehlivosti**

$$\begin{aligned}
(d,h) &= \left(m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha/2)\,,\, m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha/2)\right) \\
&= \left(-0.4273684 - \frac{0.6768715}{\sqrt{38}} t_{38-1}(1-0.01/2)\,,\, -0.4273684 - \frac{0.6768715}{\sqrt{38}} t_{38-1}(0.01/2)\right) \\
&= \left(-0.4273684 - \frac{0.6768715}{6.164414} t_{37}(0.995)\,,\, -0.4273684 - \frac{0.6768715}{6.164414} t_{37}(0.005)\right) \\
&= (-0.4273684 - 0.1098031 \times 2.715409\,,\, -0.4273684 - 0.109803 \times (-2.715409)) \\
&= (-0.7255287\,,\, -0.1292083)
\end{aligned}$$

```r
dh <- m - s / sqrt(n) * qt(1 - alpha / 2, n - 1) # -0.7255286
hh <- m - s / sqrt(n) * qt(alpha / 2, n - 1) # -0.1292082
```

   - **Závěr testování**
     Protože $\mu_0 = 0$ nenáleží do Waldova 99% empirického oboustranného intervalu spolehlivosti, tj. $\mu_0 = 0 \notin IS$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.01$.

5. **Testování p-hodnotou**

   - **p-hodnota**

$$\begin{aligned}
p\text{-hodnota} &= 2\min\{\Pr(T_W \le t_W)\,,\, \Pr(T_W > t_W)\} \\
&= 2\min\{\Pr(T_W \le t_W)\,,\, 1 - \Pr(T_W \le t_W)\} \\
&= 2\min\{\Pr(T_W \le -3.892136)\,,\, 1 - \Pr(T_W \le -3.892136)\} \\
&= 2\min\{0.0001999986\,,\, 0.9998\} \\
&= 2 \times 0.0001999986 = 0.0003999972 \doteq 0.0004
\end{aligned}$$

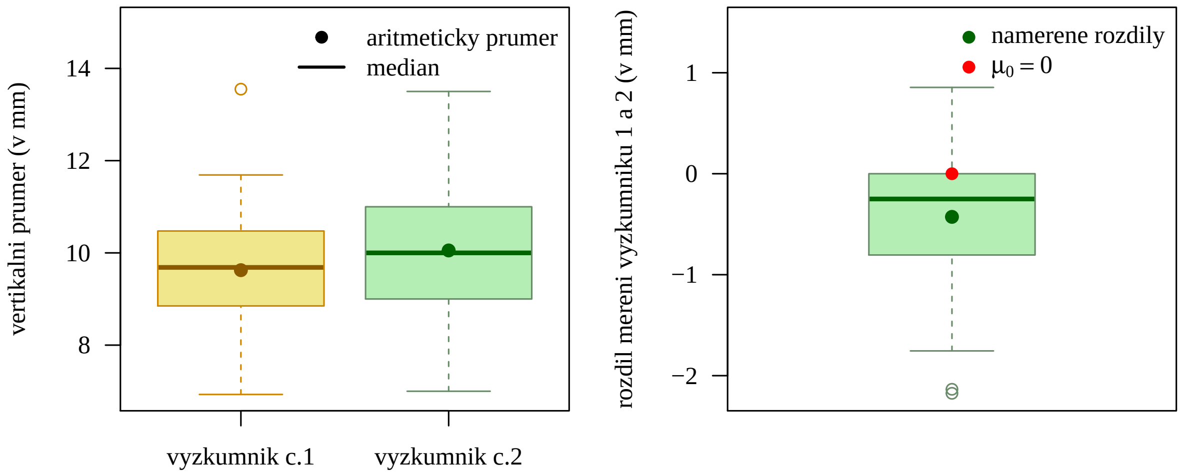
```r
p.val <- 2 * min (pt(tw, n - 1), 1 - pt(tw, n - 1)) # 0.0003999971
```

   - **Závěr testování**
     Protože p-hodnota $= 0.0004$ je menší než $\alpha = 0.01$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.01$.

6. **Interpretace výsledků**
   Za základě všech tří typů testování zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti $\alpha = 0.01$. Mezi střední hodnotou měření vertikálního průměru ve středu délky těla klíční kosti na levé straně u prvního a druhého výzkumníka existuje statisticky významný rozdíl.

7. **Grafická vizualizace výsledku testování**
   Porovnání měření obou výzkumníků nejlépe vizualizujeme pomocí krabicového diagramu. Vybrat si můžeme mezi dvěma variantami diagramů. Prvním, který porovnává vzájemně měření prvního a druhého výzkumníka, a druhým který porovnává rozdíly s konstantou $\mu_0 = 0$.

Poznámka: Párový test můžeme provést pomocí funkce `t.test()`. Vstupními parametry budou vektor reprezentující měření prvního výzkumníka (`simd.AL`), vektor reprezentující měření druhého výzkumníka (`simd.BL`), argument



Obrázek 16: Krabicový diagram rozdílů měření prvního a druhého výzkumníka hodnot vertikálního průměru ve středu délky těla klíční kosti na levé straně

paired = T určující, že oba vektory považujeme za párová pozorování, hodnota hladiny významnosti α zadaná prostřednictvím koeficientu spolehlivosti $1 - \alpha$ nastavením hodnoty argumentu conf.level = 0.99 a typ zvolené alternativní hypotézy (oboustranná) zadaný pomocí argumentu alternative = 'two.sided'.

```
t.test(simd.AL, simd.BL, paired = T, conf.level = 0.99, alternative = 'two.sided')
```

```

	Paired t-test

data:  simd.AL and simd.BL
t = -3.8921, df = 37, p-value = 4e-04
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
99 percent confidence interval:
 -0.7255286 -0.1292082
sample estimates:
mean of the differences
             -0.4273684
```

Součástí výstupu je hodnota testovací statistiky t = -3.8921, počet stupňů volnosti Studentova rozdělení df = 37, hranice 99% Waldova empirického oboustranného intervalu spolehlivosti -0.7255286 a -0.1292082 a p-hodnota p-value = 4e-04. Jediné, co musíme stanovit zvlášť, jsou dolní a horní hranice kritického oboru.

Druhou možností provedení párového testu je opět pomocí funkce t.test(), kde vstupními parametry budou vektor rozdílů naměřených hodnot prvního a druhého výzkumníka (simd.ABL), argument mu = 0 určující, že rozdíly porovnáváme s konstantou $\mu_0 = 0$, hodnota hladiny významnosti α zadaná prostřednictvím koeficientu spolehlivosti $1 - \alpha$ (conf.level = 0.99) a typ zvolené alternativní hypotézy (alternative = 'two.sided').

```
t.test(simd.ABL, mu = 0, conf.level = 0.99, alternative = 'two.sided')
```

Výstup tohoto příkazu je totožný s výše uvedeným výstupem. Záleží tedy na nás, jakou syntaxi k zadání párového testu použijeme. ★

```

        One Sample t-test

data:  simd.ABL
t = -3.8921, df = 37, p-value = 4e-04
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
99 percent confidence interval:
 -0.7255286 -0.1292082
sample estimates:
 mean of x
-0.4273684
```

Příklad 7.12. Párový test

Máme datový soubor 03-paired-means-clavicle2.txt obsahující údaje o délkách klíční kosti (*clavicula*) z pravé strany (length.R) a levé strany (length.L) z anglického souboru dokumentovaných skeletů (Parsons, 1916, viz soubor D-03-paired-means-clavicle2). Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ zjistěte, zda je střední hodnota délky klíční kosti u mužů z levé strany větší než střední hodnota délky klíční kosti u mužů z pravé strany.

Řešení příkladu 7.12

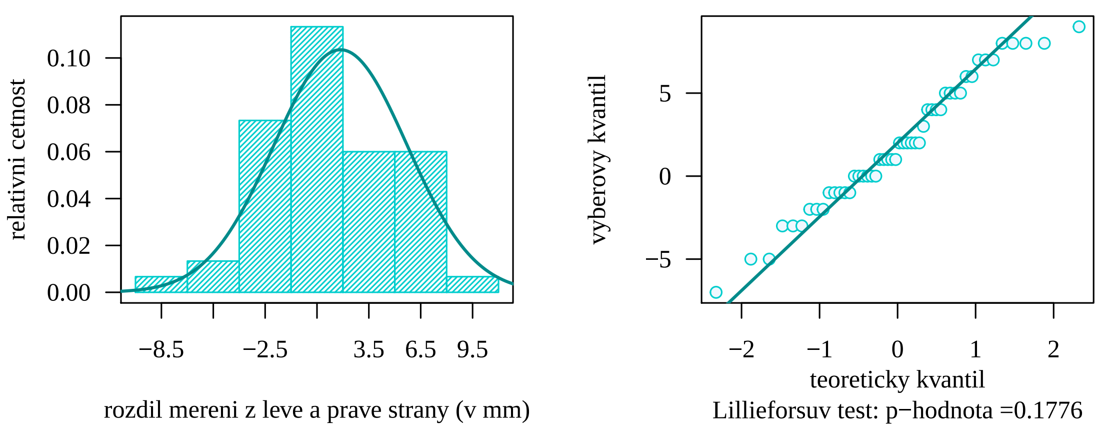
Nejprve příkazem read.delim() načteme datový soubor a pomocí operátoru [] z něj vybereme pouze údaje o délce klíční kosti z levé strany (sloupce length.L resp. z pravé strany (length.R) u mužů sex == 'm'. Údaje vložíme do proměnné length.LRM. Z datové tabulky následně odstraníme chybějící údaje a zjistíme rozsah náhodného výběru.

```
data <- read.delim('00-Data\\03-paired-means-clavicle2.txt')
data.LRM <- data[data$sex == 'm', c('length.L', 'length.R')]
data.LRM <- na.omit(data.LRM)
dim(data.LRM) # 50x2
```

Datový soubor obsahuje údaje o délce klíční kosti z levé a pravé strany u 50 mužů. Úkolem ze zadání je porovnat naměřené hodnoty na levé a pravé straně. Jde tedy o měření stejného znaku (délka klíční kosti) sledovaného na stejných subjektech (muži), proto použijeme na tuto situaci párový test. Prvním krokem k tohoto testu je vytvoření rozdílů hodnot naměřených na levé a pravé straně. V druhém kroku je potřeba ověřit předpoklad normality rozdílů.

Vzhledem k rozsahu náhodného výběru použijeme k ověření normality rozdílů Lillieforsův test ($\alpha = 0.05$)v kombinaci s kvantilovým diagramem a histogramem (viz obrázek 17). Datový soubor rozdělíme do šesti ekvidistatních intervalů s šířkou 0.51 mm prostřednictvím stanovených hranic $-2.195, -2.405, \ldots, 0.865$.

```
length.RM <- data.LRM[, 'length.R']
length.LM <- data.LRM[, 'length.L']
length.LRM <- length.LM - length.RM
```



Obrázek 17: Histogram a diagram rozdílů měření délky klíční kosti na levé a na pravé straně u mužů

Protože p-hodnota $= 0.1776$ je větší než 0.05, nulovou hypotézu o normalitě dat nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Zatímco histogram křivku hustoty normálního rozdělení přesně nevystihuje, v kvantilovém diagramu je zřejmá dostatečná příchylnost bodů k referenční přímce a výjimkou tří bodů na pravém chvostu. Náhodný výběr rozdílů délek klíčních kostí z levé a pravé strany tedy pochází z normálního rozdělení.

Naším úkolem je zjistit, zda je střední hodnota délky klíční kosti u mužů z levé strany větší než střední hodnota délky klíční kosti u mužů z pravé strany. Tento problém převedeme na analogický problém, kdy porovnáme střední hodnotu rozdílů měření z levé a pravé strany s konstantou $\mu_0 = 0$. Původní i analogické tvrzení jsou zněním alternativní hypotézy a zbývá dodefinovat znění nulové hypotézy.

1. **Stanovení hypotéz**

   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
     H_0 : *Střední hodnota délky klíční kosti u mužů z levé strany menší nebo rovná střední hodnotě délky klíční kosti u mužů z pravé strany.*
     H_1 : *střední hodnota délky klíční kosti u mužů z levé strany větší než střední hodnota délky klíční kosti u mužů z pravé strany.*
   - **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
     $H_0 : \mu \leq \mu_0$, kde $\mu_0 = 0$
     $H_1 : \mu > \mu_0$, kde $\mu_0 = 0$ (pravostranná alternativa)

2. **Volba hladiny významnosti**

   - Hladinu významnosti volíme $\alpha = 0.05$ (viz zadání příkladu).

3. **Testování kritickým oborem**

   - **Testovací statistika**

$$T_W = \frac{M - \mu_0}{S}\sqrt{n} = \frac{1.86 - 0}{3.854549}\sqrt{50} = \frac{1.86}{3.854549} \times 7.071068 = 3.412121 \doteq 3.4121$$

```
alpha <- 0.05
mu_0 <- 0
m  <- mean(length.LRM)
s  <- sd(length.LRM)
tw <- (m - mu_0) / s * sqrt(n) # 3.41212
```

   - **Kritický obor**

$$\begin{aligned} W &= \langle t_{n-1}(1-\alpha)\,;\,\infty) \\ &= \langle t_{50-1}(1-0.05)\,;\,\infty) \\ &= \langle t_{49}(0.95)\,;\,\infty) \end{aligned}$$

```
qt(1 - alpha, n - 1) # 1.676551
```

   - **Závěr testování**
     Protože realizace testovací statistiky $t_W = 3.4121$ náleží do kritického oboru, tj. $t_W \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

4. **Testování intervalem spolehlivosti**

   - **Interval spolehlivosti**

$$\begin{aligned} (d, h) &= \left(m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha/2)\,,\,\infty\right) \\ &= \left(1.86 - \frac{3.854549}{\sqrt{50}} t_{50-1}(1-0.05)\,,\,\infty\right) \\ &= \left(1.86 - \frac{3.854549}{7.071068} t_{49}(0.95)\,,\,\infty\right) \\ &= (1.86 - 0.5451155 \times 1.676551\,,\,\infty) \\ &= (0.9460861\,,\,\infty) \end{aligned}$$

```
dh <- m - s / sqrt(n) * qt(1 - alpha, n - 1) # 0.9460859
```

- **Závěr testování**
  Protože $\mu_0 = 0$ nenáleží do Waldova 95% empirického levostranného intervalu spolehlivosti, tj. $\mu_0 = 0 \notin IS$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

5. **Testování p-hodnotou**

   - **p-hodnota**

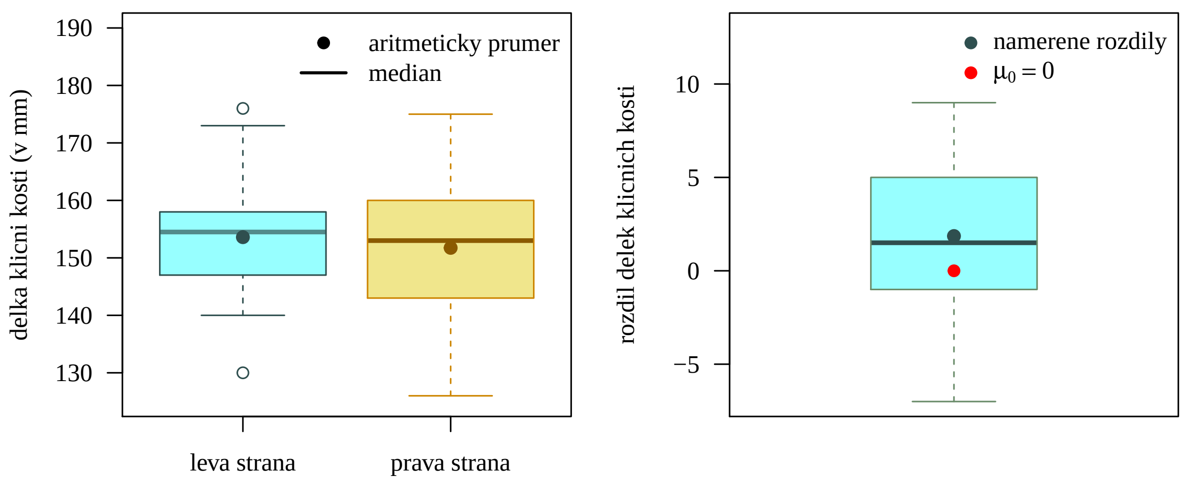
$$p\text{-hodnota} = 1 - \Pr(T_W \leq t_W)\} = 1 - \Pr(T_W \leq 3.41212)\} = 0.0006503568 \doteq 0.0006504$$

```
p.val <- 1 - pt(tw, n - 1) # 0.0006503568
```

   - **Závěr testování**
     Protože p-hodnota $= 0.0006504$ je menší než $\alpha = 0.05$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

6. **Interpretace výsledků**
   Za základě všech tří typů testování zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Střední hodnota délky klíční kosti mužů na levé straně je statisticky významně větší než střední hodnota délky klíční kosti mužů na pravé straně.

7. **Grafická vizualizace výsledku testování**
   Porovnání měření obou výzkumníků nejlépe vizualizujeme pomocí krabicového diagramu.



Obrázek 18: Krabicový diagram rozdílů délky klíční kosti u mužů na levé a na pravé straně

Poznámka: Párový test provedeme také pomocí funkce t.test(). Vstupními parametry budou vektor reprezentující měření délky klíční kosti na levé straně (length.LM), vektor reprezentující měření délky klíční kosti na pravé straně (length.RM), volba párového testu (paired = T), hodnota hladiny významnosti α (conf.level = 0.95) a volba pravostranné alternativní hypotézy (alternative = 'greater').

```
t.test(length.LM, length.RM, paired = T, conf.level = 0.95, alternative = 'greater')
```

Součástí výstupu je hodnota testovací statistiky t = 3.4121, počet stupňů volnosti Studentova rozdělení df = 49, hranice 95% Waldova empirického oboustranného intervalu spolehlivosti 0.9460859 a Inf a p-hodnota p-value = 0.0006504. Jediné, co musíme stanovit zvlášť, je dolní hranice kritického oboru. ★

```

        Paired t-test

data:  length.LM and length.RM
t = 3.4121, df = 49, p-value = 0.0006504
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
95 percent confidence interval:
 0.9460859       Inf
sample estimates:
mean of the differences
                   1.86
```

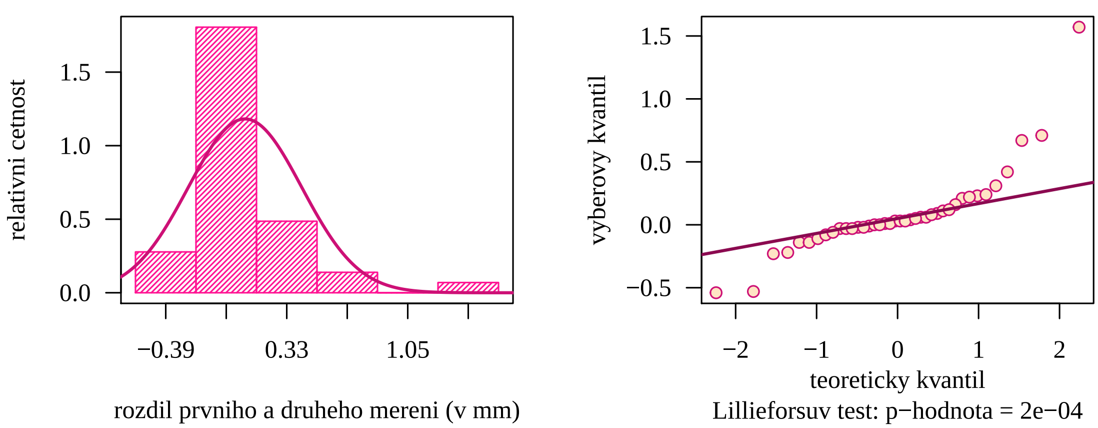
Příklad 7.13. Párový test Máme datový soubor 02-paired-means-clavicle.txt obsahující údaje o hodnotách vertikálního průměru středu délky těla klíční kosti z pravé a levé strany (*clavicula*) z pohřebiště u Sv. Jakuba v Brně, převážně z období středověku, naměřené jedním výzkumníkem ve dvou opakovaných měřeních (viz sekce **??**). Hodnoty naměřené při prvním opakování jsou uloženy v proměnné simd.1, hodnoty naměřené při druhém opakování jsou uloženy v proměnné simd.2. Můžeme zjistit, že aritmetický průměr hodnot získaných v rámci prvního měření je větší než aritmetický průměr hodnot získaných v rámmci druhého meření. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ zjistěte, zda je střední hodnota prvního měření větší než střední hodnota druhého měření vertikálního průměru délky těla klíční kosti na levé straně provedené tímto výzkumníkem.

Řešení příkladu 7.13
Nejprve příkazem read.delim() načteme datový soubor a pomocí operátoru [] z něj vybereme pouze údaje naměřené sledovaným výzkumníkem (sloupce simd.1 a simd.2) na levé straně side == 'L'. Údaje vložíme do proměnné data.12L. Z datové tabulky následně odstraníme chybějící údaje a zjistíme rozsah náhodného výběru.

```
data <- read.delim('00-Data\\02-paired-means-clavicle.txt')
data.12L <- data[data$side == 'L', c('simd.1', 'simd.2')]
data.12L <- na.omit(data.12L)
dim(data.12L) # 40x2
```

Datový soubor obsahuje 40 opakovaných měření délky těla klíční kosti z levé strany. Protože naším úkolem ze zadání je porovnat opakovaná měření provedená na jednom subjektu, použijeme k tomuto porovnání párový test. Prvním krokem k provedení tohoto testu je vytvoření rozdílů hodnot získaných v prvním a druhém měření. V druhém kroku je potřeba ověřit jediný předpoklad, který musí být splněn, abychom mohli párový test provést, a sice ověřit normalní rozdělení těchto rozdílů.

Vzhledem k rozsahu náhodného výběru ($n = 40 > 30$) použijeme k ověření normality rozdílů Lillieforsův test ($\alpha = 0.05$). Graficky zhodnotíme rozdělení náhodného výběru kvantilovým diagramem a histogramem (viz obrázek **??**). Datový soubor rozdělíme do šesti ekvidistatních intervalů s šířkou 0.36 mm prostřednictvím stanovených hranic $-0.57, -0.21, \ldots, 1.59$.

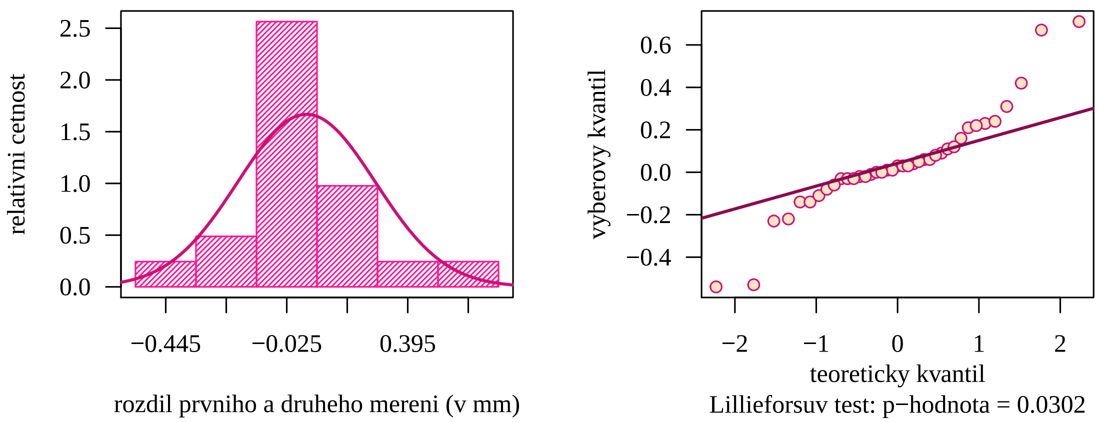


Obrázek 19: Histogram a diagram rozdílů prvního a druhého měření hodnot vertikálního průměru ve středu délky těla klíční kosti na levé straně provedené jedním výzkumníkem

Protože p-hodnota = 0.00020223 je menší než 0.05, nulovou hypotézu o normalitě rozdílů zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Histogram naměřených hodnot ukazuje na vyšikmení rozdílů směrem doleva s prodlouženým pravým koncem. Kvantilový diagram ukazuje na odlehlost bodů od referenční přímky a minimálně jeden extrémně odlehlý bod na pravé straně. Náhodný výběr rozdílů hodnot získaných v prvním a druhém měření nepochází z normálního rozdělení.

Předpoklad normality pro použití parametrického testu není splněn, proto není možné trvzení ze zadání ověřit pomocí parametrického párového testu. Jednou z možností, jak příklad dále řešit je zkusit odstranit rozdíl s nejvyšší hdonotou vyskytující se ve vektoru simd.12L. Vypsáním vektoru rozdílů simd.12L můžeme zjistit, že odlehlé pozorování nabývá hodnoty 1.57 a je umístěno na 36. pozici ve vektoru simd.12L. Pomocí operátoru [] toto pozorování odstraníme a provedeme opětovně Lillieforsův test normality a zobrazíme histogram a kvantilový diagram (viz obrázek 20).

```
simd.12L2 <- simd.12L[-36]
```



Obrázek 20: Histogram a diagram rozdílů prvního a druhého měření hodnot vertikálního průměru ve středu délky těla klíční kosti na levé straně po odstranění nejodlehlejšího pozorování

Protože p-hodnota = 0.0302 je menší než 0.05, nulovou hypotézu o normalitě rozdílů zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Histogram zobrazující rozdíly prvního a druhého měření sice vypadá lépe, ale u kvantilového grafu stále vidíme fatální odchylky bodů od referenční přímky. Náhodný výběr rozdílů hodnot získaných v prvním a druhém měření nepochází z normálního rozdělení.

Předpoklad normality pro použití parametrického testu není ani po odstranění nejodlehlejšího rozdílu splněn, proto není možné trvzení ze zadání ověřit pomocí parametrického párového testu. Otázku ze zadání bychom tedy ověřili pomocí neparametrické alternativy párového testu, tj. metodami uvedenými v kapitole **??**. ★

7.5 Test o korelačním koeficientu ρ

Nechť $(X_1, Y_1)^T \ldots (X_n, Y_n)^T$ je náhodný výběr z $N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ a nechť ρ_0 je konstanta. Na hladině významnosti α testujeme jednu z následujících tří hypotéz oproti příslušné alternativní hypotéze.

$$
\begin{array}{lll l}
H_{01}: \rho = \rho_0 & \text{oproti} & H_{11}: \rho \neq \rho_0 & \text{(oboustranná alt.)} \\
H_{02}: \rho \leq \rho_0 & \text{oproti} & H_{12}: \rho > \rho_0 & \text{(pravostranná alt.)} \\
H_{03}: \rho \geq \rho_0 & \text{oproti} & H_{13}: \rho < \rho_0 & \text{(levostranná alt.)}
\end{array}
$$

Test nazýváme jednovýběrovým Z-testem o korelačním koeficientu ρ. Testovací statistika má tvar

$$Z_W = \sqrt{n-3}(Z_R - \xi_0), \tag{7.4}$$

kde $Z_R = \frac{1}{2} \ln \frac{1+R}{1-R}$ je Fisherova Z-transformace výběrového korelačního koeficientu R a $\xi_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}$ je Fisherova Z-transformace konstanty ρ_0 z nulové hypotézy a n je rozsah náhodného výběru. Testovací statistika Z_W pochází asymptoticky ($n \geq 10$) ze standardizovaného normálního rozdělení, tj.

$$Z_W = \sqrt{n-3}(Z_R - \xi_0) \overset{\mathcal{A}}{\sim} N(0,1).$$

Kritický obor podle zvolené alternativní hypotézy má tvar

$$
\begin{array}{ll}
H_{11}: \rho \neq \rho_0 & W = \left(-\infty\,;\, u_{\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}\,;\, \infty\right) \\
H_{12}: \rho > \rho_0 & W = \langle u_{1-\alpha}\,;\, \infty) \\
H_{13}: \rho < \rho_0 & W = (-\infty\,;\, u_{\alpha}\rangle
\end{array}
$$

kde $u_{\alpha/2}$, $u_{1-\alpha/2}$, u_α, $u_{1-\alpha}$ jsou kvantily standardizovaného normálního rozdělení, jejichž hodnoty získáme pomocí a implementované funkce `qnorm()`.

Interval spolehlivosti má podle zvolené alternativní hypotézy jeden z následujících tvarů

$$
\begin{array}{ll}
H_{11}: \rho \neq \rho_0 & (d,h) = \left(\tanh\left(z_R - \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right)\,;\, \tanh\left(z_R - \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right)\right) \\
H_{12}: \rho > \rho_0 & (d,1) = \left(\tanh\left(z_R - \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{n-3}}\right)\,;\, 1\right) \\
H_{13}: \rho < \rho_0 & (-1,h) = \left(-1\,;\, \tanh\left(z_R - \frac{u_{\alpha}}{\sqrt{n-3}}\right)\right)
\end{array}
$$

kde tanh je hyperbolický tangens, jehož hodnotu získáme pomocí a implementované funkce `tanh()`.

Poznámka: Dá se ukázat, že mezi korelačním koeficientem ρ_0 a ξ_0 platí vztah $\rho_0 = \tanh(\xi_0)$, který je inverzí ke vztahu $\xi_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}$. Všimněme si, že $z_R - \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}$ a $z_R - \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}$ jsou dolní a horní hranice intervalu spolehlivosti pro Z-transformaci ξ_0, neboť z_R je také Z-transformace. Hyperbolický tangens potom funguje jako zpětná transformace, která převede hranice intervalu spolehlivosti pro ξ_0 zpátky na hranice intervalu spolehlivosti pro korelační koeficient ρ_0.

Poznámka: Protože parametr ρ je korelační koeficient, platí, že $\rho \in \langle -1; 1\rangle$. Proto levostranný interval spolehlivosti omezíme shora hodnotou 1, namísto nekonečnem, a pravostranný interval spolehlivosti omezíme zdola hodnotou -1, namísto mínus nekonečnem.

p-hodnota má v závislosti na zvolené alternativní hypotéze jeden z následujících tvarů

$$
\begin{array}{ll}
H_{11}: \rho \neq \rho_0 & p\text{-hodnota} = 2\min\{\Pr(Z_W \leq z_W)\,,\, \Pr(Z_W > z_W)\} \\
H_{12}: \rho > \rho_0 & p\text{-hodnota} = \Pr(Z_W > z_W) = 1 - \Pr(Z_W \leq z_W) \\
H_{13}: \rho < \rho_0 & p\text{-hodnota} = \Pr(Z_W \leq z_W)
\end{array}
$$

kde Z_W je náhodná veličina, z_W je realizace testovací statistiky Z_W (viz vzorec 7.4), tedy konkrétní číslo, a $\Pr(Z_W \leq z_W)$ je distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení, jejíž hodnotu získáme pomocí a implementované funkce `pnorm()`.

Příklad 7.14. Test o korelačním koeficientu ρ
Mějme datový soubor 05-one-sample-correlation-skull-mf.txt, proměnnou skull.pH popisující největší výšku mozkovny a proměnnou face.H popisující morfologickou výšku tváře (viz sekce **??**) starověké egyptské populace. Současně máme k dispozici hodnotu korelačního koeficientu mezi oběma znaky a údaje o počtu případů ze vzorku novověké egyptské mužské populace. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte hypotézu o shodě korelačního koeficientu největší výšky mozkovny a morfologické výšky tváře u mužů starověké a novověké egyptské populace.

Řešení příkladu 7.14
Datový soubor načteme příkazem read.delim(). Pomocí operátoru [] vybereme z tabulky údaje o největší výšce mozkovny (skull.pH) a morfologické výšce tváře face.H u mužů sex == 'm'. Údaje vložíme do proměnné data.M. Pomocí příkazu na.omit() odstraníme z tabulky data.M chybějící údaje. Nakonec příkazem dim() zjistíme rozsah náhodného výběru a příkazem range() rozsahy naměřených hodnot obou proměnných.

```
data <- read.delim('00-Data\\05-one-sample-correlation-skull-mf.txt')
data.M <- data[data$sex == 'm', c('skull.pH', 'face.H')]
data.M <- na.omit(data.M)
skull.pHM <- data.M$skull.pH
face.HM   <- data.M$face.H
range(skull.pHM) # 127-149
range(face.HM) # 100-136
```

Datový soubor obsahuje údaje o největší výšce mozkovny a morfologické výšce tváře u 164 mužů, přičemž naměřené největší výšky mozkovny nabývají hodnot v rozmezí 127–149 mm a naměřené morfologické výšky tváře nabývají hodnot v rozmezí 100-136 mm.

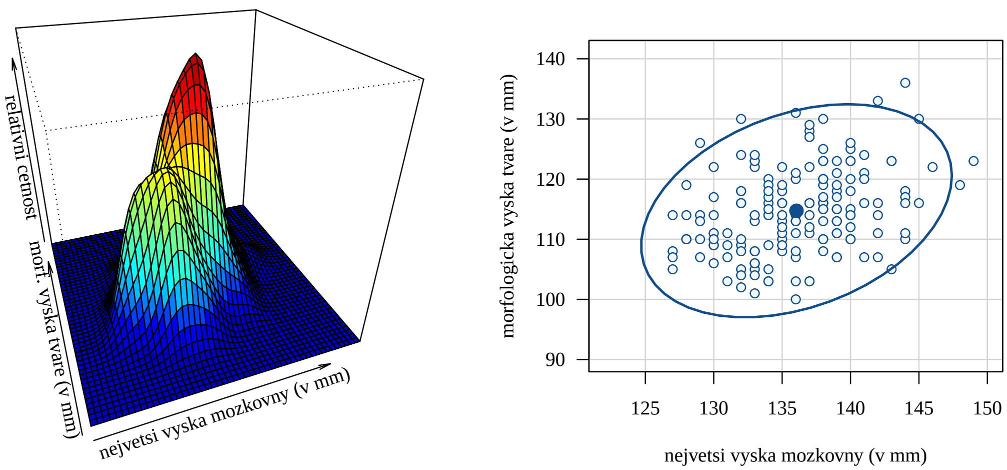
Naším úkolem je porovnat korelanční koeficienty dvou egyptských populací, přičemž u mužů ze starověké egyptské populace známe naměřené hodnoty. Na základě těchto hodnot můžeme zjistit, zda náhodný výběr pochází z dvourozměrného normálního rozdělení. Druhá, novověká egyptská populace je reprezentována pouze hodnotou korelačníko koeficientu ($r_0 = 0.251$). O jejím rozdělení přesnější informace nemáme. Řešení příkladu vede na případ, kdy korelační koeficient jednoho náhodného výběru porovnáváme s konkrétním číslem, tedy na jednovýběrový test o korelančím koeficientu ρ. Předpokladem k použití tohoto testu je dvourozměrná normalita náhodného výběru největších výšek mozkovny a morfologických výšek tváře mužů starověké egyptské populace. Před použitím testu je třeba tento předpoklad ověřit.

Závěr o dvourozměrné normalitě obou náhodných výběrů stanovíme na základě Mardiova testu ($\alpha = 0.05$) v kombinaci s grafickou vizualizací dat pomocí 3D grafu a tečkového diagramu superponovaného 95 % elipsou spolehlivosti, analogicky, jako je uvedeno v sekci **??**.

```
MVN::mvn(data.M, mvnTest = 'mardia')$multivariateNormality
# sikmost: 0.3852790 # spicatost: 0.1998495
```

Protože p-hodnota testu o nevýznamnosti koeficientu šikmosti, tj. 0.3853, je větší než 0.05, hypotézu o nevýznamnosti koeficientu šikmosti nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Dále protože p-hodnota testu o nevýznamnosti koeficientu špičatosti, tj. 0.1998, je větší než 0.05, nezamítáme hypotézu o nevýznamnosti koeficientu špičatosti. Protože náhodný výběr nevykazuje statisticky významné známky zešikmení ani zešpičatění, nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ hypotézu o dvourozměrné normalitě náhodného výběru největších výšek mozkovny a morfologických výšek tváře u mužů starověké egyptské populace. Ke stejnému závěru bychom došli také použitím Henze-Zirklerova testu (p-hodnota $= 0.64065 > 0.05$) i Roystonova testu (p-hodnota $= 0.05850 > 0.05$).

Nyní se podíváme na grafickou vizualizaci náhodného výběru (viz graf 21) prostřednictvím 3D grafu obarveného pomocí 20 odstínů z palety matlab.like2 z knihovny colorRamps. 3D graf nám ukazuje kopcovitý tvar náhodného výběru složený z vyššího a nižšího kopce, které splývají v jeden objekt. Vzhledem k tomu, že rozsah náhodného výběru je 164, požadujeme, aby elipsa spolehlivosti pokrývala alepsoň 156 bodů. Zbylých 8 bodů smí ležet mimo elipsu spolehlivosti. V našem případě leží mimo elipsu spolehlivosti právě osm bodů, což podporuje výsledek Mardiova testu. Náhodný výběr největších výšek mozkovny a morfologických výšek tváře u mužů starověké egytské populace pochází z dvourozměrného normálního rozdělení.



Obrázek 21: 3D graf a tečkový diagram s 95% elipsou spolehlivosti pro největší výšku mozkovny a morfologickou výšku tváře mužů starověké egyptské populace (v mm)

Jelikož je předpoklad dvourozměrné normality náhodného výběru splněn, můžeme hypotézu ze zadání otestovat pomocí parametrického testu o korelačním koeficientu ρ. Naším úkolem otestovat (nulovou) hypotézu o shodě korelačního koeficientu největší výšky mozkovny a morfologické výšky tváře u mužů starověké a novověké egyptské populace. Zbývá tedy stanovit znění alternativní hypotéz tak, aby bylo doplňkem k nulové hypotéze. Testování provedeme v posloupnosti sedmi kroků.

1. **Stanovení hypotéz**
   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
     H_0 : *Korelační koeficient proměnných největší výška mozkovny a morfologická výška tváře u mužů starověké egyptské populace je rovný hodnotě 0.251.*
     H_1 : *Korelační koeficient proměnných největší výška mozkovny a morfologická výška tváře u mužů starověké egyptské populace není rovný hodnotě 0.251.*
   - **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
     $H_0 : \rho = \rho_0$, kde $\rho_0 = 0.251$
     $H_1 : \rho \neq \rho_0$, kde $\rho_0 = 0.251$
     (oboustranná alternativa)
2. **Volba hladiny významnosti**
   - Hladinu významnosti volíme v souladu se zadáním $\alpha = 0.05$.
3. **Testování kritickým oborem**
   - Fisherova Z-transformace výběrového korelačního koeficientu
     K výpočtu Fisherovy Z-transformace potřebujeme znát hodnotu výběrového korelačního koeficientu. Tuto hodnotu získáme pomocí příkazu `cor()` s nastaveným argumentem `method == 'pearson'`. Výběrový korelační koeficient největší výšky mozkovny a morfologické výšky tváře mužů starověké egyptské populace $r = 0.33064$. Nyní můžeme vypočítat Fisherovu Z-transformaci korelačního koeficientu a Fisherovu Z-tranformaci konstanty $\rho_0 = 0.251$ z nulové hypotézy.

$$
\begin{aligned}
Z_R &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+R}{1-R} \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{1+0.3306431}{1-0.3306431} = \frac{1}{2} \ln \frac{1.3306431}{0.6693569} = \frac{1}{2} \ln 1.987943 \\
&= 0.5 \times 0.6871002 = 0.3435501 \doteq 0.3436
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi_0 &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{1+0.251}{1-0.251} = \frac{1}{2}\ln\frac{1.251}{0.749} = \frac{1}{2}\ln 1.670227 \\
&= 0.5 \times 0.5129595 = 0.2564798 \doteq 0.2565
\end{aligned}
$$

```
alpha <- 0.05
n     <- length(skull.pHM)
rho0  <- 0.251
r     <- cor(skull.pHM, face.HM, method = 'pearson')
zR   <- 1 / 2 * log((1 + r) / (1 - r))       # 0.3435501
ksi0 <- 1 / 2 * log((1 + rho0) / (1 - rho0)) # 0.2564798
```

- **Testovací statistika**

$$
\begin{aligned}
Z_W &= \frac{Z_R - \xi_0}{\sqrt{n-3}} \\
&= (0.3435501 - 0.2564798)\sqrt{164-3} \\
&= 0.0870703 \times \sqrt{161} \\
&= 0.0870703 \times 12.68858 \\
&= 1.104798
\end{aligned}
$$

```
Zw   <- (zR - ksi0) * sqrt(n - 3) # 1.104799
```

- **Kritický obor**

$$
\begin{aligned}
W &= (-\infty\,;\, u_{\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}\,;\, \infty) \\
&= (-\infty\,;\, u_{0.05/2}\rangle \cup \langle u_{1-0.05/2}\,;\, \infty) \\
&= (-\infty\,;\, u_{0.025}\rangle \cup \langle u_{0.975}\,;\, \infty) \\
&= (-\infty\,;\, -1.959964\rangle \cup \langle 1.959964\,;\, \infty)
\end{aligned}
$$

```
qnorm(alpha / 2) # -1.959964
qnorm(1 - alpha / 2) # 1.959964
```

- **Závěr testování**
  Protože realizace testovací statistiky $z_W = 1.1048$ nenáleží do kritického oboru, tj. $z_W \notin W$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

4. **Testování intervalem spolehlivosti**

- **Interval spolehlivosti**

$$
\begin{aligned}
(d,h) &= \left(\tanh\left(z_R - \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right) ; \tanh\left(z_R - \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right)\right) \\
&= \left(\tanh\left(0.3435501 - \frac{u_{1-0.05/2}}{\sqrt{164-3}}\right) ; \tanh\left(0.3435501 - \frac{u_{0.05/2}}{\sqrt{164-3}}\right)\right) \\
&= \left(\tanh\left(0.3435501 - \frac{u_{0.975}}{\sqrt{161}}\right) ; \tanh\left(0.3435501 - \frac{u_{0.025}}{\sqrt{161}}\right)\right) \\
&= \left(\tanh\left(0.3435501 - \frac{1.959964}{12.68858}\right) ; \tanh\left(0.3435501 - \frac{-1.959964}{12.68858}\right)\right) \\
&= \left(\tanh\left(0.3435501 - 0.1544668\right) ; \tanh\left(0.3435501 - (-0.1544668)\right)\right) \\
&= \left(\tanh\left(0.1890833\right) ; \tanh\left(0.4980169\right)\right) \\
&= (0.1869 ; 0.46056)
\end{aligned}
$$

```
dh <- tanh(zR - qnorm(1 - alpha / 2) / sqrt(n - 3)) # 0.1868617
hh <- tanh(zR - qnorm(alpha / 2) / sqrt(n - 3)) # 0.4605561
```

- **Závěr testování**
  Protože $\rho_0 = 0.251$ náleží do Waldova 95% empirického oboustranného intervalu spolehlivosti, tj. $\rho_0 = 0.251 \in IS$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

5. **Testování p-hodnotou**

   - **p-hodnota**

$$
\begin{aligned}
p\text{-hodnota} &= 2\min\{\Pr(Z_w \leq z_w), \Pr(Z_W > z_w)\} \\
&= 2\min\{\Pr(Z_w \leq z_w), 1 - \Pr(Z_W \leq z_w)\} \\
&= 2\min\{\Pr(Z_w \leq 1.104799), 1 - \Pr(Z_W \leq 1.104799)\} \\
&= 2\min\{0.8653766, 0.1346234\} \\
&= 2 \times 0.1346234 \\
&= 0.2692467 \doteq 0.2692
\end{aligned}
$$

```
2 * min(pnorm(Zw), 1 - pnorm(Zw)) # 0.2692467
```

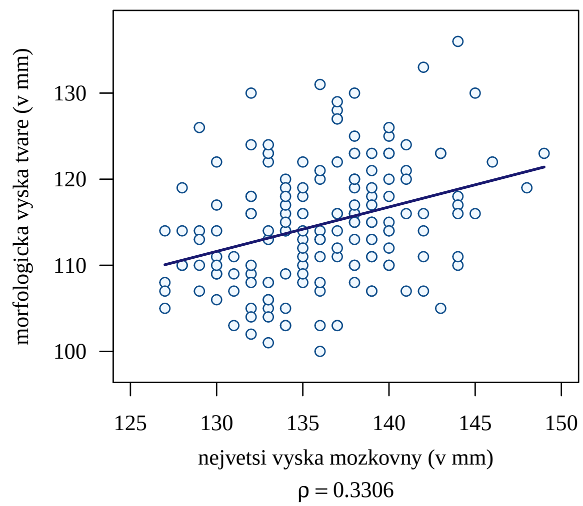
   - **Závěr testování**
     Protože p-hodnota $= 0.2692$ je větší než $\alpha = 0.05$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

6. **Grafická vizualizace výsledků testování**
   Vhodným grafem ukazujícím míru závislosti mezi největší výškou mozkovny a morfologickou výškou tváře je tečkový diagram superponovaný lineární regresní přímkou prokládající zobrazené body. Nejprve příkazem plot() vykreslíme body největší výšky mozkovny a morfologické výšky tváře mužů starověké egyptské populace. Koeficienty lineární regresní přímky získáme pomocí funkce lm(), jejímž jediným argumentem bude vztah face.HM skull.pHM, tj. vztah vyjadřující závislost mezi proměnnou face.HM na ose y a proměnnou skull.pHM na ose x. Koeficienty regresní přímky, které jsou vloženy v položce coefficients, získáme z výstupu funkce lm pomocí odkazu $coef. Dále vytvoříme posloupnost tisíce bodů x v rozsahu hodnot proměnné skull.pHM a vypočítáme hodnoty regresní přímky v bodech posloupnosti x, které vložíme do proměnné y. Nakonec vykreslíme lineární regresní přímku v bodech x,y příkazem lines(). Nakonec do grafu doplníme pod osu x popisek obsahující hodnotu výběrového korelačního koeficientu $r = 0.33064$ (příkaz mtext()).

```
par(mar = c(5, 4, 1, 1), family = 'Times')
```

```
plot(skull.pHM, face.HM, xlab = '', ylab = 'morfologicka vyska tvare (v mm)',
     xlim = c(125, 150), ylim = c(98, 138),
     las = 1, pch = 21, col = 'dodgerblue4', bg = 'aliceblue')
k <- lm(face.HM ~ skull.pHM)$coef
x <- seq(min(skull.pHM), max(skull.pHM), length = 1000)
y <- k[1] + x * k[2]
lines(x, y , col = 'midnightblue', lwd = 2)

r <- round(r, digit = 4)
mtext('nejvetsi vyska mozkovny (v mm)', side = 1, line = 2.3)
mtext(bquote(paste(rho == . (r),)), side = 1, line = 3.7)
```



Obrázek 22: Tečkový diagram s lineární regresní přímkou pro největší výšku mozkovny a morfologickou výšku tváře mužů starověké egyptské populace (v mm)

7. **Interpretace výsledků:**
   Na základě všech tří způsobů testování nezamítáme hypotézu o shodě korelačních koeficientů pro největší výšku mozkovny a morfologickou výšku tváře mužů starověké a novověké egyptské populace. Mezi korelačním koeficientem největší výšky mozkovny a morfologické výšky tváře mužů starověké a novověké egyptské populace neexistuje statisticky významný rozdíl. Mezi největší výškou mozkovny a morfologickou výškou tváře mužů starověké egyptské populace existuje nízký stupeň přímé lineární závislosti ($\rho_1 = 0.33064$). Taktéž mezi největší výškou mozkovny a morfologickou výškou tváře mužů starověké egyptské populace existuje nízký stupeň přímé lineární závislosti ($\rho_2 = 0.2510$) (viz stupnice míry závislosti pro Pearsonův korelační koeficient, kapitola **??**).

★

Příklad 7.15. Test o korelačním koeficientu ρ
Mějme datový soubor 13-two-samples-correlations-trunk.txt, proměnnou lowex.L popisující délku dolní končetiny (v mm) a proměnnou tru.L popisující délku trupu (v mm) (viz sekce **??**). Na hladině významnosti $\alpha = 0.01$ zjistěte, zda mezi délkou dolní končetiny a délky trupu žen existuje statisticky významná přímá lineární závislost.

Řešení příkladu 7.15
Datový soubor načteme příkazem read.delim(). Pomocí operátoru [] vybereme z tabulky údaje o délce dolní končetiny (lowex.L) a délce trupu tru.L žen sex == 'f'. Údaje vložíme do proměnné data.F. Z tabulky data.F odstraníme chybějící údaje (na.omit()). Nakonec zjistíme rozsah náhodného výběru (dim()) a rozsahy naměřených hodnot obou proměnných (range()).

```
data <- read.delim('00-Data\\13-two-samples-correlations-trunk.txt')
data.F <- data[data$sex == 'f', c('lowex.L', 'tru.L')]
data.F <- na.omit(data.F)
dim(data.F) # 100x2

lowex.LF <- data.F$lowex.L
tru.LF   <- data.F$tru.L
range(lowex.LF) # 836-1076
range(tru.LF)   # 323-492
```

Datový soubor obsahuje údaje o délce dolní končetiny a délce trupu u 100 žen, přičemž naměřené délky dolní končetiny nabývají hodnot v rozmezí 836–1 076 mm a naměřené délky trupu nabývají hodnot v rozmezí 323–492 mm.

Naším úkolem je porovnat korelační koeficient populace žen s konstantou $\rho_0 = 0$. Řešení příkladu tedy vede na jednovýběrový test o korelačním koeficientu ρ. Předpokladem k použití tohoto testu je dvourozměrná normalita náhodného výběru délek dolní končetiny a délek trupu žen. Před použitím testu je třeba tento předpoklad ověřit.

Závěr o dvourozměrné normalitě obou náhodných výběrů stanovíme na základě Henze-Zirklerova testu ($\alpha = 0.05$) v kombinaci s grafickou vizualizací dat pomocí 3D grafu a tečkového diagramus 95 % elipsou spolehlivosti.

```
MVN::mvn(data.F, mvnTest = 'hz')$multivariateNormality # 0.587225
```

Protože p-hodnota Henze-Zirklerova testu, tj. 0.587225, je větší než 0.05, hypotézu o dvourozměrné normalitě náhodného výběru délek dolních končetin a délek trupu žen nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Ke stejnému závěru bychom došli také použitím Mardiova testu (p-hodnota pro koeficient šikmosti $= 0.1769 > 0.05$, p-hodnota pro koeficient špičatosti $= 0.8360 > 0.05$) i Roystonova testu (p-hodnota $= 0.6339 > 0.05$).

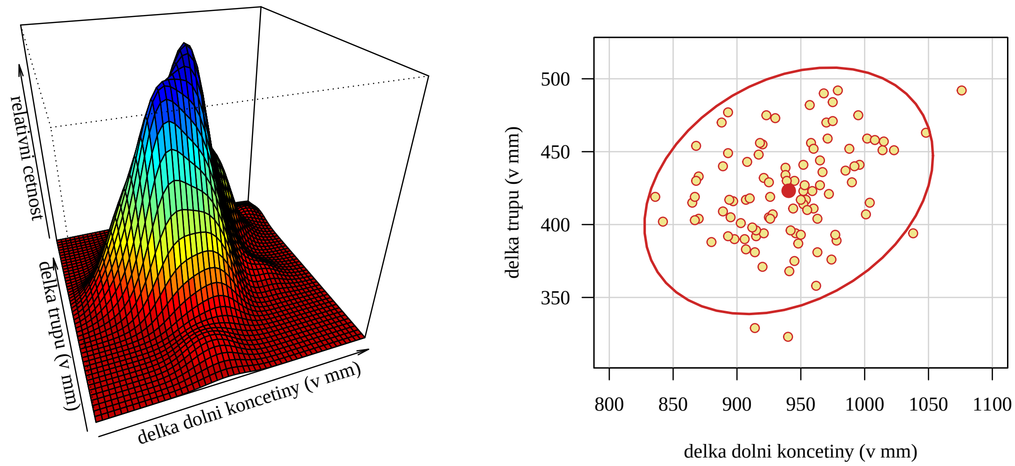
Nyní se podíváme na grafickou vizualizaci náhodného výběru (viz graf 23) prostřednictvím 3D grafu obarveného 20 odstíny z palety matlab.like2. Odstíny tentokrát používáme v obráceném pořadí (viz funkce rev()).

3D graf nám ukazuje kopcovitý tvar s několika málo odlehlými hodnotami. Vzhledem k tomu, že rozsah náhodného výběru je 100, je třeba, aby elipsa spolehlivosti pokrývala alepsoň 95 bodů. Zbylých 5 bodů se smí realizovat mimo 95 % elipsu spolehlivosti. Z tečkového diagramu vidíme, že mimo elipsu spolehlivosti se realizují pouze 4 body. Na základě Henze-Zirklerova testu a grafické vizualizace docházíme k závěru, že náhodný výběr délek dolních končetin a délek trupu pochází z dvourozměrného normálního rozdělení.

Jelikož je předpoklad dvourozměrné normality náhodného výběru splněn, můžeme použít parametrický testu o rkorelačním koeficientu ρ. Naším úkolem zjistit, zda mezi délkou dolní končetiny a délky trupu žen existuje statisticky významná přímá lineární závislost. Protože ukazatelem přímé závislosti je kladná hodnota korelačního koeficientu, je naším úkolem zjistit, zda je korelační koeficient délky dolní končetiny a délky trupu žen větší než 0. Analogicky jako v předchozích příkladech je toto tvrzení je zněním alternativní hypotézy. Nulovou hypotézu dodefinujeme jako doplněk k tomuto trvzení.

1. **Stanovení hypotéz**

   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
     H_0 : *Korelační koeficient proměnných délka dolní končetiny a délka trupu je menší nebo rovný 0.*
     H_1 : *Korelační koeficient proměnných délka dolní končetiny a délka trupu je větší než 0.*



Obrázek 23: 3D graf a tečkový diagram s 95% elipsou spolehlivosti pro délku dolní končetiny a délku trupu žen (v mm)

- **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
  $H_0 : \rho \leq \rho_0$, kde $\rho_0 = 0$
  $H_1 : \rho > \rho_0$, kde $\rho_0 = 0$
  (pravostranná alternativa)

2. **Volba hladiny významnosti**

   - Hladinu významnosti volíme podle zadání $\alpha = 0.01$.

3. **Testování kritickým oborem**

   - Fisherova Z-transformace výběrového korelačního koeficientu
     K výpočtu Fisherovy Z-transformace zjistíme nejprve hodnotu výběrového korelačního koeficientu pomocí příkazu cor(). Výběrový korelační koeficient délky dolní končetiny a délky trupu žen $r = 0.2853$. Nyní můžeme vypočítat Fisherovu Z-transformaci korelačního koeficientu a konstanty $\rho_0 = 0$ z nulové hypotézy.

$$\begin{aligned} Z_R &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+R}{1-R} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+0.285256}{1-0.285256} = \frac{1}{2} \ln \frac{1.285256}{0.714744} = \frac{1}{2} \ln 1.798205 \\ &= 0.5 \times 0.5867888 = 0.2933944 \doteq 0.2934 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+0}{1-0} = \frac{1}{2} \ln 1 \\ &= 0.5 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

```
alpha <- 0.01
n     <- length(lowex.LF)
rho0  <-0
r     <- cor(lowex.LF, tru.LF, method = 'pearson')
zR   <- 1 / 2 * log((1 + r) / (1 - r))        # 0.2933943
ksi0 <- 1 / 2 * log((1 + rho0) / (1 - rho0)) # 0
```

- **Testovací statistika**

$$
\begin{aligned}
Z_W &= \frac{Z_R - \xi_0}{\sqrt{n-3}} \\
&= (0.2933943 - 0)\sqrt{100-3} \\
&= 0.2933943 \times \sqrt{97} \\
&= 0.2933943 \times 9.848858 \\
&= 2.889599 \doteq 2.8896
\end{aligned}
$$

```
Zw   <- (zR - ksi0) * sqrt(n - 3) #  2.889599
```

- **Kritický obor**

$$
\begin{aligned}
W &= \langle u_{1-\alpha}\,;\,\infty) \\
&= \langle u_{1-0.01}\,;\,\infty) \\
&= \langle u_{0.99}\,;\,\infty) \\
&= \langle 2.326348\,;\,\infty)
\end{aligned}
$$

```
qnorm(1 - alpha) # 2.326348
```

- **Závěr testování**
  Protože realizace testovací statistiky $z_W = 2.8896$ náleží do kritického oboru, tj. $z_W \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.01$.

4. **Testování intervalem spolehlivosti**

- **Interval spolehlivosti**

$$
\begin{aligned}
(d, 1) &= \left(\tanh\left(z_R - \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{n-3}}\right)\,;\,1\right) \\
&= \left(\tanh\left(0.2933943 - \frac{u_{1-0.01}}{\sqrt{100-3}}\right)\,;\,1\right) \\
&= \left(\tanh\left(0.2933943 - \frac{u_{0.99}}{\sqrt{97}}\right)\,;\,1\right) \\
&= \left(\tanh\left(0.2933943 - \frac{2.326348}{9.848858}\right)\,;\,1\right) \\
&= (\tanh(0.2933943 - 0.2362048)\,;\,1) \\
&= (\tanh(0.0571895)\,;\,1) \\
&= (0.05712723\,;\,1)
\end{aligned}
$$

```
dh <- tanh(zR - qnorm(1 - alpha) / sqrt(n - 3)) # 0.05712723
```

- **Závěr testování**
  Protože $\rho_0 = 0$ nenáleží do Waldova 99% empirického levostranného intervalu spolehlivosti, tj. $\rho_0 = 0 \notin IS$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.01$.

5. **Testování p-hodnotou**

   - **p-hodnota**

$$
\begin{aligned}
p\text{-hodnota} &= 1 - \Pr(Z_W \leq z_w) \\
&= 1 - \Pr(Z_W \leq 2.889599) \\
&= 0.001928667 \doteq 0.001929
\end{aligned}
$$

```
1 - pnorm(Zw) # 0.001928667
```

   - **Závěr testování**
     Protože p-hodnota $= 0.001929$ je menší než $\alpha = 0.01$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.01$.

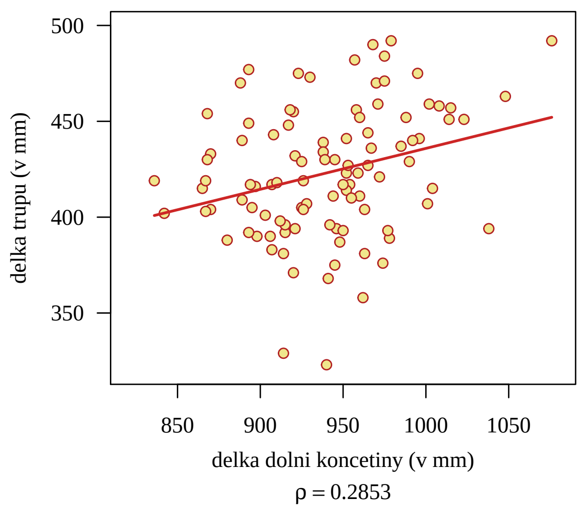
6. **Grafická vizualizace výsledků testování**
   Míru závislosti mezi délkou dolní končetiny a délkou trupu vizualizujeme tečkovým diagramem superponovaným lineární regresní přímkou, která prokládá zobrazené body. Nejprve vykreslíme body délky dolní končetiny a délky trupu (příkaz plot()). Koeficienty lineární regresní přímky získáme pomocí funkce lm(), jejímž argumentem bude vztah tru.LF lowex.LF, tj. vztah vyjadřující závislost mezi proměnnou tru.LF na ose y a proměnnou lowex.LF na ose x. Koeficienty regresní přímky získáme z výstupu funkce lm pomocí odkazu $coef. Dále vytvoříme posloupnost tisíce bodů x v rozsahu hodnot proměnné lowex.LF a vypočítáme hodnoty regresní přímky v bodech posloupnosti x, které vložíme do proměnné y.

```
par(mar = c(5, 4, 1, 1), family = 'Times')
plot(lowex.LF, tru.LF, xlab = '', ylab = 'delka trupu (v mm)',
     xlim = c(820, 1080), ylim = c(320, 500),
     las = 1, pch = 21, col = 'firebrick', bg = 'khaki')
k <- lm(tru.LF ~ lowex.LF)$coef
x <- seq(min(lowex.LF), max(lowex.LF), length = 1000)
y <- k[1] + x * k[2]
lines(x, y , col = 'firebrick3', lwd = 2)

r <- round(r, digit = 4)
mtext('delka dolni koncetiny (v mm)', side = 1, line = 2.3)
mtext(bquote(paste(rho == . (r),)), side = 1, line = 3.7)
```

7. **Interpretace výsledků:**
   Na základě všech tří způsobů testování zamítáme hypotézu H_0. Korelační koeficient délky dolní končetiny a délky trupu žen je statisticky významně větší než 0. To znamená, že mezi délkou dolní končetiny a délkou trupu žen existuje statisticky významná přímá závislost. Interpretací výběrového korelačního koeficientu můžeme stanovit, že mezi oběma znaky existuje nízký stupeň přímé lineární závislosti ($\rho_1 = 0.2853$), který je statisticky významný.

★



Obrázek 24: Tečkový diagram s lineární regresní přímkou pro délku dolní končetiny a délku trupu žen (v mm)

Příklad 7.16. Test o korelačním koeficientu ρ

Mějme datový soubor 06-lin-uhl-fm.txt, proměnnou skull.H popisující výšku lebky v mm a proměnnou base.B popisující šířku lebeční báze na spojnici obou bodů porion v mm (viz sekce **??**). Na hladině významnosti $\alpha = 0.10$, zda mezi výškou lebky a šířkou lebeční báze žen existuje významná nepřímá závislost.

Řešení příkladu 7.16

Nejprve načteme datový soubor a vybereme z něj údaje o výšce lebky (skull.H) a šířce lebeční báze base.B žen sex == 'f'. Údaje vložíme do proměnné data.F. Z tabulky data.F následně odstraníme NA hodnoty a zjistíme rozsah náhodného výběru a rozsahy naměřených hodnot obou proměnných.

```
data <- read.delim('00-Data\\06-lin-uhl-fm.txt')
data.F <- data[data$sex == 'f', c('skull.H', 'base.B')]
data.F <- na.omit(data.F)
dim(data.F) # 20x2
skull.HF <- data.F$skull.H
base.BF  <- data.F$base.B
range(skull.HF) # 115.4675-142.0617
range(base.BF)  # 108.5226-123.0860
```

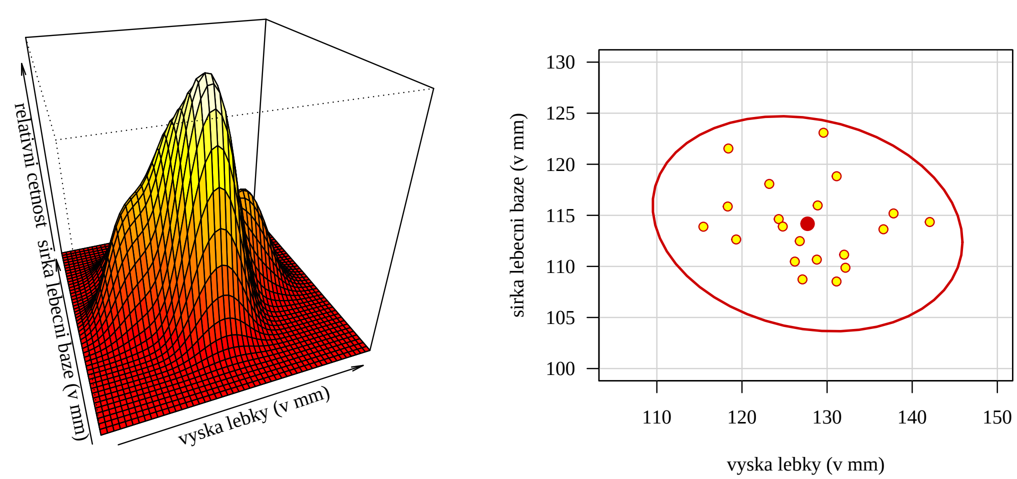
Datový soubor obsahuje údaje o výšce lebky a šířce lebeční báze u 20 žen, přičemž naměřené výšky lebky nabývají hodnot v rozmezí 115.46–142.062 mm a naměřené šířky lebeční báze nabývají hodnot v rozmezí 108.523–123.086 mm.

Naším úkolem je porovnat korelační koeficient populace žen s konstantou $\rho_0 = 0$. Řešení příkladu tedy vede na jednovýběrový test o korelačním koeficientu ρ. Před použitím tohoto testu je třeba ověřit předpoklad normality náhodného výběru výšek lebky a šířek lebeční báze žen. Předkoklad normality ověříme Roystonovým testem ($\alpha = 0.05$) v kombinaci s 3D grafem a tečkovým diagramem s 95 % elipsou spolehlivosti.

```
MVN::mvn(data.F, mvnTest = 'royston')$multivariateNormality # 0.6845014
```

Protože p-hodnota Roystonova testu, tj. 0.6845, je větší než 0.05, hypotézu o dvourozměrné normalitě náhodného výběru výšek lebky a šířek lebeční báze žen nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Ke stejnému závěru bychom došli také použitím Mardiova testu (p-hodnota pro koeficient šikmosti $= 0.7607 > 0.05$, p-hodnota pro koeficient špičatosti $= 0.3897 > 0.05$) i Henze-Zirklerova testu (p-hodnota $= 0.3559 > 0.05$).

Nyní se podíváme na grafickou vizualizaci náhodného výběru (viz graf 25).



Obrázek 25: 3D graf a tečkový diagram s 95% elipsou spolehlivosti pro výšku lebky a šířku lebeční báze žen (v mm)

Grafy na obrázku 25 podporují výsledek testování. 3F graf zobrazuje normální rozdělení náhodného výběru tvořené jedním pospolitým kopcem bez výraznějších odlehlých pozorování. Z tečkového diagramu je navíc patrné,

že všechny body leží uvnitř elipsy spolehlivosti. Náhodný výběr výšek lebky a šířek lebeční báze žen pochází z dvourozměrného normálního rozdělení.
Jelikož je předpoklad dvourozměrné normality náhodného výběru splněn, můžeme použít parametrický testu o korelačním koeficientu ρ. Naším úkolem zjistit, zda mezi výškou lebky a šířkou lebeční báze žen existuje statisticky významná nepřímá lineární závislost. Protože ukazatelem nepřímé závislosti je záporná hodnota korelačního koeficientu, je naším úkolem zjistit, zda je korelační koeficient výšky lebky a šířky lebeční báze žen menší než 0. Analogicky jako v předchozích příkladech je toto tvrzení je zněním alternativní hypotézy. Nulovou hypotézu dodefinujeme jako doplněk k tomuto trvzení.

1. **Stanovení hypotéz**
   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
     H_0 : *Korelační koeficient výšky lebky a šířky lebeční báze žen je větší nebo rovný 0.*
     H_1 : *Korelační koeficient výšky lebky a šířky lebeční báze žen je menší než 0.*
   - **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
     $H_0 : \rho \geq \rho_0$, kde $\rho_0 = 0$
     $H_1 : \rho < \rho_0$, kde $\rho_0 = 0$
     (levostranná alternativa)
2. **Volba hladiny významnosti**
   - Hladinu významnosti volíme v souladu se zadáním $\alpha = 0.10$.
3. **Testování kritickým oborem**
   - Fisherova Z-transformace výběrového korelačního koeficientu
     Nejprve vypočítáme hodnotu výběrového korelačního koeficientu R výšky lebky a šířky lebeční báze ($r = -0.1713$). Nyní můžeme vypočítat Fisherovu Z-transformaci korelačního koeficientu a Fisherovu Z-tranformaci konstanty $\rho_0 = 0$.

$$\begin{aligned} Z_R &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+R}{1-R} \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+(-0.1712964)}{1-(-0.1712964)} = \frac{1}{2}\ln\frac{0.8287036}{1.171296} = \frac{1}{2}\ln 0.70751 \\ &= 0.5 \times (-0.3460036) = -0.1730018 \doteq -0.1730 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+0}{1-0} = \frac{1}{2}\ln 1 = 0.5 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

```
alpha <- 0.10
n     <- length(skull.HF)
rho0  <- 0
r     <- cor(skull.HF, base.BF, method = 'pearson') # -0.1712964
zR   <- 1 / 2 * log((1 + r) / (1 - r))       # -0.173002
ksi0 <- 1 / 2 * log((1 + rho0) / (1 - rho0)) # 0
```

   - **Testovací statistika**

$$
\begin{aligned}
Z_W &= \frac{Z_R - \xi_0}{\sqrt{n-3}} \\
&= (-0.173002 - 0)\sqrt{20-3} \\
&= -0.173002 \times \sqrt{17} \\
&= -0.173002 \times 4.123106 \\
&= -0.7133056 \doteq -0.7133
\end{aligned}
$$

```
Zw   <- (zR - ksi0) * sqrt(n - 3) # -0.7133054
```

- **Kritický obor**

$$
\begin{aligned}
W &= (-\infty\,;\, u_{\alpha}\rangle \\
&= (-\infty\,;\, u_{0.10}\rangle \\
&= (-\infty\,;\, -1.281552\rangle
\end{aligned}
$$

```
qnorm(alpha) # -1.281552
```

- **Závěr testování**
  Protože realizace testovací statistiky $z_W = -0.7133$ nenáleží do kritického oboru, tj. $z_W \notin W$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.10$.

4. **Testování intervalem spolehlivosti**

- **Interval spolehlivosti**

$$
\begin{aligned}
(-1, h) &= \left(-1\,;\, \tanh\left(z_R - \frac{u_{\alpha}}{\sqrt{n-3}}\right)\right) \\
&= \left(-1\,;\, \tanh\left(-0.173002 - \frac{u_{0.10}}{\sqrt{20-3}}\right)\right) \\
&= \left(-1\,;\, \tanh\left(-0.173002 - \frac{-1.281552}{4.123106}\right)\right) \\
&= (-1\,;\, \tanh(-0.173002 - (-0.310822))) \\
&= (-1\,;\, \tanh(0.13782)) \\
&= (-1\,;\, 0.136954)
\end{aligned}
$$

```
hh <- tanh(zR - qnorm(alpha) / sqrt(n - 3)) # 0.1369539
```

- **Závěr testování**
  Protože $\rho_0 = 0$ náleží do Waldova 90% empirického pravostranného intervalu spolehlivosti, tj. $\rho_0 = 0 \in IS$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.10$.

5. **Testování p-hodnotou**

- **p-hodnota**

$$
\begin{aligned}
p\text{-hodnota} &= \Pr(Z_w \leq z_w) \\
&= \Pr(Z_w \leq -0.7133054) \\
&= 0.2378284 \doteq 0.2378
\end{aligned}
$$

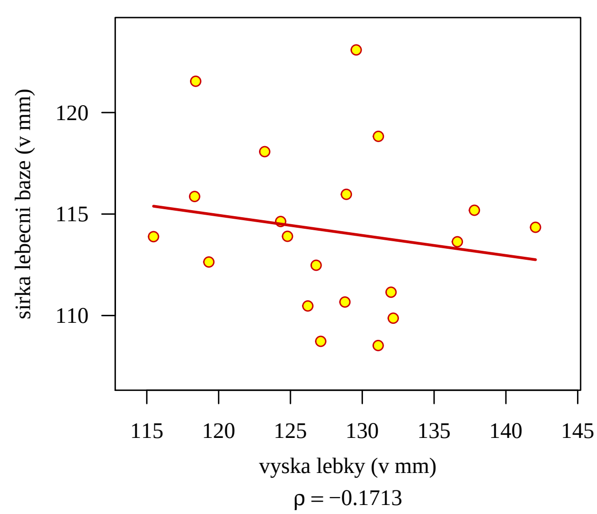
```
pnorm(Zw) # 0.2378284
```

- **Závěr testování**
  Protože p-hodnota $= 0.2378$ je větší než $\alpha = 0.10$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.10$.

6. **Grafická vizualizace výsledků testování**
   Míru závislosti mezi výškou lebky a šířkou lebeční báze vizualizujeme tečkovým diagramem superponovaným lineární regresní přímkou, která prokládá zobrazené body. Koeficienty lineární regresní přímky získáme pomocí funkce lm(), jejímž argumentem bude vztah base.BF skull.HF, tj. vztah vyjadřující závislost mezi proměnnou base.BF na ose y a proměnnou skull.HF na ose x. Dále vytvoříme posloupnost bodů x v rozsahu hodnot proměnné skull.HF a vypočítáme hodnoty regresní přímky v bodech této posloupnosti.

```
par(mar = c(5, 4, 1, 1), family = 'Times')
plot(skull.HF, base.BF, xlab = '', ylab = 'sirka lebecni baze (v mm)',
     xlim = c(114, 144), ylim = c(107, 124),
     las = 1, pch = 21, col = 'red3', bg = 'yellow')
k <- lm(base.BF ~ skull.HF)$coef
x <- seq(min(skull.HF), max(skull.HF), length = 1000)
y <- k[1] + x * k[2]
lines(x, y , col = 'red3', lwd = 2)

r <- round(r, digit = 4)
mtext('vyska lebky (v mm)', side = 1, line = 2.3)
mtext(bquote(paste(rho == . (r),)), side = 1, line = 3.7)
```



Obrázek 26: Tečkový diagram s lineární regresní přímkou pro výšku lebky a šířku lebeční báze žen (v mm)

7. **Interpretace výsledků:**
   Na základě všech tří způsobů testování nezamítáme hypotézu H_0. Korelační koeficient výšky lebky a šířky

lebeční báze žen není statisticky významně menší než 0. To znamená, že mezi výškou lebky a šířkou lebeční báze neexistuje statisticky významná nepřímá závislost. Interpretací výběrového korelačního koeficientu můžeme stanovit, že mezi oběma znaky existuje nízký stupeň nepřímé lineární závislosti ($\rho_1 = -0.1713$), který není statisticky významný.

★

Příklad 7.17. Test o korelačním koeficientu ρ
Mějme datový soubor 16-anova-head.txt, proměnnou bigo.W popisující šířku dolní čelisti v mm a proměnnou bizyg.W popisující šířku tváře v mm (viz sekce **??**). Na hladině významnosti $\alpha = 0.10$ testujte hypotézu o nepřímé závislosti mezi šířkou dolní čelisti a šířkou tváře u mužů.

Řešení příkladu 7.17
Nejprve načteme datový soubor a vybereme z něj údaje o šířce dolní čelisti (bigo.W) a šířce tváře bizyg.W mužů sex == 'm'. Údaje vložíme do proměnné data.M. Z tabulky data.M následně odstraníme chybějící údaje, zjistíme rozsah náhodného výběru a rozsahy naměřených hodnot obou proměnných.

```
data <- read.delim('00-Data\\16-anova-head.txt')
data.M <- data[data$sex == 'm', c('bigo.W', 'bizyg.W')]
data.M <- na.omit(data.M)
dim(data.M) # 75x2
bigo.WM <- data.M$bigo.W
bizyg.WM  <- data.M$bizyg.W
range(bigo.WM) # 94 126
range(bizyg.WM)  # 113-155
```

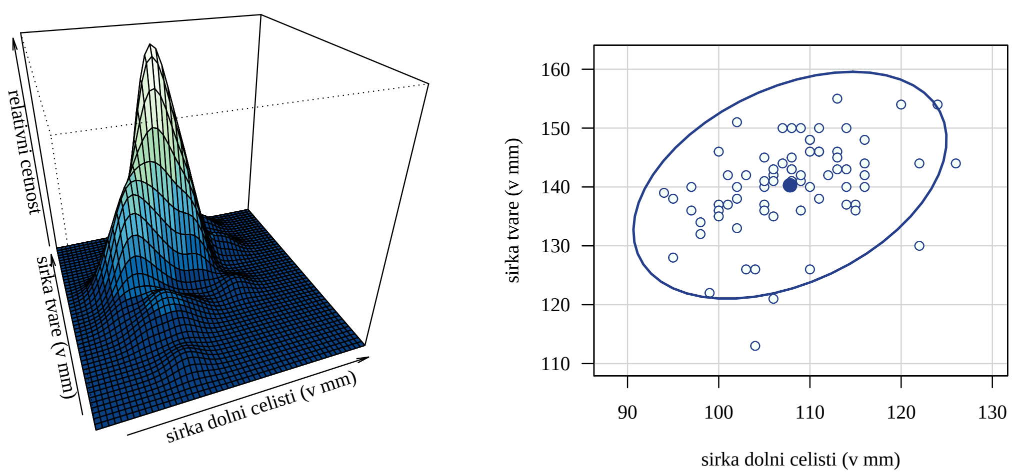
Datový soubor obsahuje údaje o šířce dolní čelisti a šířce tváře 75 mužů, přičemž naměřené šířky dolní čelisti nabývají hodnot v rozmezí 94–126 mm a naměřené šířky tváře nabývají hodnot v rozmezí 113-155 mm.

Naším úkolem je porovnat korelační koeficient populace mužů s konstantou $\rho_0 = 0$. Řešení příkladu vede na jednovýběrový test o korelačním koeficientu ρ. Před použitím tohoto testu je třeba ověřit předpoklad normality náhodného výběru šířek dolní čelisti a šířek tváře mužů. Předkoklad normality ověříme Henze-Zirklerovým testem ($\alpha = 0.05$) v kombinaci s 3D grafem a tečkovým diagramem s 95 % elipsou spolehlivosti.

```
MVN::mvn(data.M, mvnTest = 'hz')$multivariateNormality # 0.006343478
```

Protože p-hodnota Henze-Zirklerova testu, tj. 0.006343, je menší než 0.05, hypotézu o dvourozměrné normalitě náhodného výběru šířek dolní čelisti a šířek tváře mužů zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Ke stejnému závěru bychom došli použitím Mardiova testu (p-hodnota pro koeficient šikmosti $= 0.002218 < 0.05$, p-hodnota pro koeficient špičatosti $= 0.05248 > 0.05$) i Roystonova testu (p-hodnota $= 0.006445 < 0.05$).

Před stanovením závěru o dvourozměrné normalitě vyhodnotíme také grafickou vizializace náhodného výběru (viz graf 27).



Obrázek 27: 3D graf a tečkový diagram s 95% elipsou spolehlivosti pro výšku lebky a šířku lebeční báze žen (v mm)

3D graf zobrazuje dvourozměrné normální rozdělení tvořené jedním vrcholem s několika odlehlými hodnotami a jedním výrazně odlehlým pozorováním. Zda je počet odlehlých pozorování unosný pro předpoklad normlaity ověříme na základě tečkového diagramu. Aby data pocházela z dovurozměrného normálního rozdělení, je potřeba, aby alespoň 71 bodů (95% bodů) leželo uvnitř elipsy spolehlivosti. Zbylé čtyři body mohou ležet mimo elipsu spolehlivosti. Bohužel mimo elipsu spolehlivosti se tentokrát nachází 5 bodů. Náhodný výběr šířek dolní čelisti a šířek lebeční báze žen nepochází z dvourozměrného normálního rozdělení.

Jelikož předpoklad dvourozměrné normality náhodného výběru není splněn, nemůžeme k otestování hypotézy ze zadání použít jednovýběrový test o korelačním koeficientu ρ.

Poznámka: V současné chvíli se nabízí více postupů, jak dále řešit nastalou situaci. Jedním z nich by bylo odstranění nejodlehlejšího pozorování a následná kontrola, zda se odstraněním tohoto pozorování nespravila normalita náhodného výběru. V případě, že ano, můžeme nový datový soubor s rozsahem 74 hodnot použít k otestování hypotézy ze zadání pomocí parametrického testu o korelačním koeficientu ρ, analogicky jako v příkladech 7.14, 7.15 a 7.16. V případě, že odstranění nevedlo k zlepšení normality náhodného výběru, mohli bychom vyzkoušet odstranění dalších odlehlých pozorování a to až do výše 10% naměřených hodnot. Pokud předpoklad normality stále není splněn, vrátíme se k původnímu souboru 75 naměřených hodnot a k otestování hypotézy ze zadání použijeme neparametrický test o korelačním koeficientu založený na Speramanově koeficientu pořadové korelace (viz kapitola **??**). ★

7.6 Test o nulovém korelačním koeficientu ρ (Test o nezávislosti)

Nechť $(X_1, Y_1)^T \dots (X_n, Y_n)^T$ je náhodný výběr z $N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Na hladině významnosti α testujeme jednu z následujících tří hypotéz oproti příslušné alternativní hypotéze.

$H_{01}: \rho = 0$	oproti	$H_{11}: \rho \neq 0$	(oboustranná alt.)
$H_{02}: \rho \leq 0$	oproti	$H_{12}: \rho > 0$	(pravostranná alt.)
$H_{03}: \rho \geq 0$	oproti	$H_{13}: \rho < 0$	(levostranná alt.)

Test nazýváme jednovýběrovým testem o nezávislosti. Testovací statistika má tvar

$$T_W = \frac{\sqrt{n-2}R}{\sqrt{1-R^2}} \tag{7.5}$$

kde R je výběrový korelační koeficient n je rozsah náhodného výběru. Testovací statistika T_W pochází ze Studentova t-rozdělení o $n-2$ stupních volnosti, tj.

$$T_W = \frac{\sqrt{n-2}R}{\sqrt{1-R^2}} \sim t_{n-2}.$$

Kritický obor podle zvolené alternativní hypotézy má tvar

$H_{11}: \rho \neq 0$	$W = (-\infty\,; t_{n-2}(\alpha/2)\rangle \cup \langle t_{n-2}(1-\alpha/2)\,; \infty)$
$H_{12}: \rho > 0$	$W = \langle t_{n-2}(1-\alpha)\,; \infty)$
$H_{13}: \rho < 0$	$W = (-\infty\,; t_{n-2}(\alpha)\rangle$

kde $t_{n-2}(\alpha/2)$, $t_{n-2}(1-\alpha/2)$, $t_{n-2}(\alpha)$, $t_{n-2}(1-\alpha)$ jsou kvantily Studentova rozdělení o $n-2$ stupních volnosti, jejichž hodnoty získáme pomocí R a implementované funkce `qt()`.

Interval spolehlivosti má podle zvolené alternativní hypotézy jeden z následujících tvarů

$$\begin{array}{ll}
H_{11}: \rho \neq 0 & (d,h) = \left(\frac{t_{n-2}(\alpha/2)}{\sqrt{t^2_{n-2}(\alpha/2)+n-2}}\,; \frac{t_{n-2}(1-\alpha/2)}{\sqrt{t^2_{n-2}(1-\alpha/2)+n-2}} \right) \\
H_{12}: \rho > 0 & (-1,h) = \left(-1\,; \frac{t_{n-2}(1-\alpha)}{\sqrt{t^2_{n-2}(1-\alpha)+n-2}} \right) \\
H_{13}: \rho < 0 & (d,1) = \left(\frac{t_{n-2}(\alpha)}{\sqrt{t^2_{n-2}(\alpha)+n-2}}\,; 1 \right)
\end{array}$$

Poznámka: Při testování hypotézy o nulovém korelačním koeficientu ρ pomocí intervalu spolehlivosti rozhodujeme o zamítnutí nebo nezamítnutí H_0 v závislosti na tom, zda hodnota výběrového korelačního koeficientu R náleží nebo nenáleží do intervalu spolehlivosti, nikoli v závislosti na tom, zda $\rho_0 = 0$ náleží nebo nenáleží do intervalu spolehlivosti. Jedná se o výjimku.

Poznámka: Protože parametr ρ je korelační koeficient, platí, že $\rho \in \langle -1; 1\rangle$. Proto levostranný interval spolehlivosti omezíme shora hodnotou 1, namísto nekonečnem, a pravostranný interval spolehlivosti omezíme zdola hodnotou -1, namísto mínus nekonečnem.

p-hodnota má v závislosti na zvolené alternativní hypotéze jeden z následujících tvarů

$H_{11}: \rho \neq 0$	$p\text{-hodnota} = 2\min\{\Pr(T_W \leq t_W)\,, \Pr(T_W > t_W)\}$
$H_{12}: \rho > 0$	$p\text{-hodnota} = \Pr(T_W > t_W) = 1 - \Pr(T_W \leq t_W)$
$H_{13}: \rho < 0$	$p\text{-hodnota} = \Pr(T_W \leq t_W)$

kde T_W je náhodná veličina, t_W je realizace testovací statistiky T_W (viz vzorec 7.5), tedy konkrétní číslo, a $\Pr(T_W \leq t_W)$ je distribuční funkce Studentova rozdělení o $n-2$ stupních volnosti, jejíž hodnotu získáme pomocí R a implementované funkce `pt()`.

Příklad 7.18. Test o korelačním koeficientu ρ
Mějme datový soubor 19-more-samples-correlations-skull.txt, proměnnou nose.B popisující šířku nosu a proměnnou intorb.B popisující interorbitální šířku (viz sekce **??**) malajské populace. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte hypotézu o nezávislosti šířky nosu a interorbitální šířky u mužů malajské populace.

Řešení příkladu 7.18
Datový soubor načteme příkazem read.delim(). Pomocí operátoru [] vybereme z tabulky údaje o šířce nosu (nose.B) a interorbitální šířce intorb.B u mužů malajské populace pop == 'mal'. Údaje vložíme do proměnné data.M. Pomocí příkazu na.omit() odstraníme z tabulky data.M chybějící údaje. Nakonec příkazem dim() stanovíme rozsah náhodného výběru a příkazem range() zjistíme rozsahy naměřených hodnot obou proměnných.

```
data <- read.delim('00-Data\\19-more-samples-correlations-skull.txt')
data.M <- data[data$pop == 'mal', c('nose.B', 'intorb.B')]
data.M <- na.omit(data.M)
dim(data.M) # 73x2
nose.BM   <- data.M$nose.B
intorb.BM <- data.M$intorb.B
range(nose.BM) # 21-30
range(intorb.BM) # 18-29
```

Datový soubor obsahuje údaje o šířce nosu a interorbitální šířce 73 mužů malajské populace, přičemž naměřené šířky nosu nabývají hodnot v rozmezí 21–30 mm a naměřené interorbitální šířky nabývají hodnot v rozmezí 18–29 mm.

Naším úkolem je porovnat korelační koeficient malajské populace s konstantou $\rho_0 = 0$, která reprezentuje nezávislost obou znaků. U mužů malajské populace máme k dispozici náhodný výběr naměřených hodnot. Na základě těchto hodnot můžeme zjistit, zda náhodný výběr pochází z dvourozměrného normálního rozdělení. Řešení příkladu vede na jednovýběrový test o nulovém korelačním koeficientu (neboli na test o nezávislosti). Předpokladem k použití tohoto testu je dvourozměrná normalita náhodného výběru šířek nosu a interorbitálních šířek mužů malajské populace. Před použitím testu je třeba tento předpoklad ověřit.

Závěr o dvourozměrné normalitě obou náhodných výběrů stanovíme na základě Henze-Zirklerova testu ($\alpha = 0.05$) v kombinaci s 3D grafem a tečkovým diagramem superponovaným 95 % elipsou spolehlivosti, analogicky, jako je uvedeno v sekci **??**.

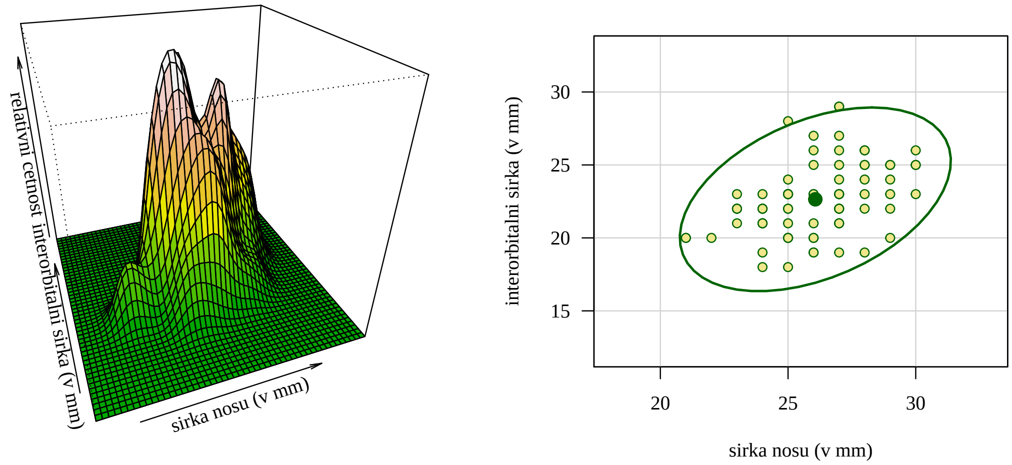
```
MVN::mvn(data.M, mvnTest = 'hz')$multivariateNormality # 0.269426
```

Protože p-hodnota Henze-Zirklerova testu, tj. 0.2694, je větší než 0.05, hypotézu o dvourozměrné normalitě náhodného výběru šířek nosu a interorbitálních šířek nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Ke stejnému závěru bychom došli použitím Mardiova testu (p-hodnota pro koeficient šikmosti $= 0.54502 > 0.05$, p-hodnota pro koeficient špičatosti $= 0.2638 > 0.05$). Na základě Rystonova testu bychom dvourozměrnou normalitu náhodného výběru zamítli (p-hodnota $= 0.02814 < 0.05$). Před vytvořením závěru o dvourozměrné normalitě zhodnotíme ještě grafickou vizualizaci náhodnégho výběru (viz graf 28).

3D graf zobrazuje pospolitý kopcovitý tvar náhodného výběru bez viditelných odlehlých pozorování. Na tečkovém diagramu vidíme, že přeci jen dvě odlehlá pozorování jsou součástí náhodného výběru. Vzhledem k tomu, že pro podpoření předpokladu normality stačí, aby mimo elipsu spolehlivosti ležely nejvýše tři body (alespoň 69 bodů se má realizovat uvnitř elipsy spolehlivosti), je normalita náhodného výběru z hlediska odlehlých pozorování v pořádku. Náhodný výběr šířek nosu a onterorbitálních šířek u mužů malajské populace pochází z dvourozměrného normálního rozdělení.

Jelikož je předpoklad dvourozměrné normality náhodného výběru splněn, můžeme hypotézu ze zadání otestovat pomocí parametrického testu o nezávislosti. Naším úkolem otestovat (nulovou) hypotézu o nezávislosti šířky nosu a interorbitální šířky, tj. hypotézu o shodě korelačního koeficientu šířky nosu a interorbitální šířky s konstantou $\rho = 0$. Zbývá tedy stanovit znění alternativní hypotézy tak, aby bylo doplňkem k nulové hypotéze. Testování provedeme v posloupnosti sedmi kroků.

1. **Stanovení hypotéz**



Obrázek 28: 3D graf a tečkový diagram s 95% elipsou spolehlivosti pro šířku nosu a interorbitální šířku mužů malajské populace (v mm)

- **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
  H_0 : *Korelační koeficient proměnných šířka nosu a interorbitální šířka tváře je rovný 0.*
  H_1 : *Korelační koeficient proměnných šířka nosu a interorbitální šířka tváře není rovný 0.*
- **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
  $H_0 : \rho = 0$
  $H_1 : \rho \neq 0$
  (oboustranná alternativa)

2. **Volba hladiny významnosti**
   - Hladinu významnosti volíme v souladu se zadáním $\alpha = 0.05$.
3. **Testování kritickým oborem**
   - **Testovací statistika**
     K výpočtu testovací statistiky potřebujeme nejprve stanovit hodnotu výběrového korelačního koeficientu. K tomu využijeme funkci cor() s argumentem method = 'pearson'. Hodnota výběrového korelačního koeficientu mezi šířkou nosu a interorbitální šířkou je $r = 0.41753$. Nyní již můžeme vypočítat hodnotu testovací statistiky

$$
\begin{aligned}
T_W &= \frac{\sqrt{n-2}R}{\sqrt{1-R^2}} \\
&= \frac{\sqrt{73-2} \times 0.4175294}{\sqrt{1-0.4175294^2}} \\
&= \frac{\sqrt{71} \times 0.4175294}{\sqrt{0.8256692}} \\
&= \frac{8.42615 \times 0.4175294}{0.9086634} \\
&= 3.871803 \doteq 3.8718
\end{aligned}
$$

```
alpha <- 0.05
r <- cor(nose.BM, intorb.BM, method = 'pearson')
n <- length(nose.BM)
tw   <- sqrt(n - 2) * r / sqrt(1 - r ^ 2) # 3.871803
```

- **Kritický obor**

$$
\begin{aligned}
W &= (-\infty\,;\, t_{n-2}(\alpha/2)\rangle \cup \langle t_{n-2}(1-\alpha/2)\,;\,\infty) \\
&= (-\infty\,;\, t_{73-2}(0.05/2)\rangle \cup \langle t_{73-2}(1-0.05/2)\,;\,\infty) \\
&= (-\infty\,;\, t_{71}(0.025)\rangle \cup \langle t_{71}(0.975)\,;\,\infty) \\
&= (-\infty\,;\, -1.9939\rangle \cup \langle 1.9939\,;\,\infty)
\end{aligned}
$$

```
qt(alpha / 2, n - 2) #-1.993943
qt(1 - alpha / 2, n - 2) # 1.993943
```

- **Závěr testování**
  Protože realizace testovací statistiky $t_W = 3.8718$ náleží do kritického oboru, tj. $t_W \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

4. **Testování intervalem spolehlivosti**

- **Interval spolehlivosti**

$$
\begin{aligned}
(d,h) &= \left(\frac{t_{n-2}(\alpha/2)}{\sqrt{t^2_{n-2}(\alpha/2)+n-2}}\,;\,\frac{t_{n-2}(1-\alpha/2)}{\sqrt{t^2_{n-2}(1-\alpha/2)+n-2}}\right) \\
&= \left(\frac{t_{73-2}(0.05/2)}{\sqrt{t^2_{73-2}(0.05/2)+73-2}}\,;\,\frac{t_{73-2}(1-0.05/2)}{\sqrt{t^2_{73-2}(1-0.05/2)+73-2}}\right) \\
&= \left(\frac{t_{71}(0.025)}{\sqrt{t^2_{71}(0.025)+71}}\,;\,\frac{t_{71}(1-0.025)}{\sqrt{t^2_{71}(1-0.025)+71}}\right) \\
&= \left(\frac{-1.993943}{\sqrt{(-1.993943)^2+71}}\,;\,\frac{1.993943}{\sqrt{1.993943^2+71}}\right) \\
&= \left(\frac{-1.993943}{\sqrt{74.97581}}\,;\,\frac{1.993943}{\sqrt{74.97581}}\right) \\
&= \left(\frac{-1.993943}{8.658857}\,;\,\frac{1.993943}{8.658857}\right) \\
&= (-0.2302779\,;\,0.2302779)
\end{aligned}
$$

```
dh <- qt(alpha / 2, n - 2) / sqrt(qt(alpha / 2, n - 2) ^ 2 + n - 2) #
    -0.2302779
hh <- qt(1 - alpha / 2, n - 2) / sqrt(qt(1 - alpha / 2, n - 2) ^ 2 + n - 2) #
    0.2302779
```

- **Závěr testování**
  Protože $r = 0.4175$ nenáleží do Waldova 95% empirického oboustranného intervalu spolehlivosti, tj. $r = 0.4175 \notin IS$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

5. **Testování p-hodnotou**

- **p-hodnota**

$$
\begin{aligned}
p\text{-hodnota} &= 2\min\{\Pr(T_w \leq t_w), \Pr(T_W > t_w)\} \\
&= 2\min\{\Pr(T_w \leq t_w), 1 - \Pr(T_W \leq t_w)\} \\
&= 2\min\{\Pr(T_w \leq 3.871803), 1 - \Pr(T_W \leq 3.871803)\} \\
&= 2\min\{0.999946, 5.401663e - 05\} \\
&= 2 \times 5.401663e - 05 \\
&= 0.0001080333 \doteq 0.000108033
\end{aligned}
$$

```
2 * min(pnorm(tw), 1 - pnorm(tw)) # 0.0001080333
```

- **Závěr testování**
  Protože p-hodnota $= 0.0001080333$ je menší než $\alpha = 0.05$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

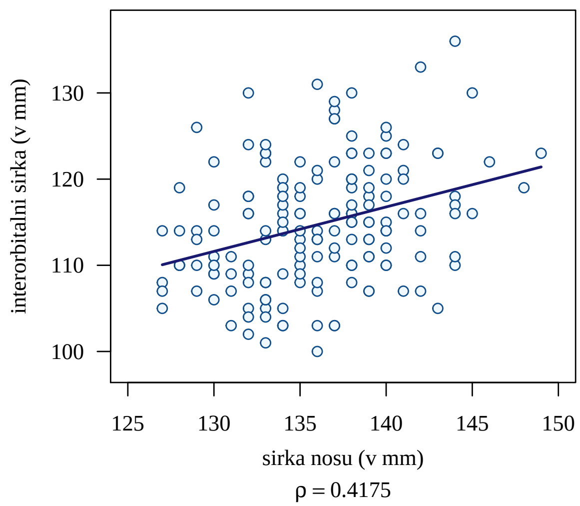
6. **Grafická vizualizace výsledků testování**
   Míru závislosti mezi šířkou nosu a interorbitální šířkou vizualizujeme tečkovým diagramem superponovaným lineární regresní přímkou prokládající zobrazené body. Nejprve příkazem plot() vykreslíme body šířky nosu a interorbitální šířky mužů malajské populace. Koeficienty lineární regresní přímky získáme pomocí funkce lm(), jejímž jedniným argumentem bude vztah intorb.BM   nose.BM, tj. vztah vyjadřující závislost mezi proměnnou intorb.BM na ose y a proměnnou nose.BM na ose x. Koeficienty regresní přímky, které jsou vloženy v položce coefficients, získáme z výstupu funkce lm pomocí odkazu $coef. Dále vytvoříme posloupnost tisíce bodů x v rozsahu hodnot proměnné nose.BM a vypočítáme hodnoty regresní přímky v bodech posloupnosti x, které vložíme do proměnné y. Nakonec vykreslíme lineární regresní přímku v bodech x, y příkazem lines(). Nakonec do grafu doplníme pod osu x popisek obsahující hodnotu výběrového korelačního koeficientu $r = 0.4175$ (příkaz mtext()).

```
par(mar = c(5, 4, 1, 1), family = 'Times')
plot(skull.pHM, face.HM, xlab = '', ylab = 'interorbitalni sirka (v mm)',
     xlim = c(125, 150), ylim = c(98, 138),
     las = 1, pch = 21, col = 'dodgerblue4', bg = 'aliceblue')
k <- lm(face.HM ~ skull.pHM)$coef
x <- seq(min(skull.pHM), max(skull.pHM), length = 1000)
y <- k[1] + x * k[2]
lines(x, y , col = 'midnightblue', lwd = 2)

r <- round(r, digit = 4)
mtext('sirka nosu (v mm)', side = 1, line = 2.3)
mtext(bquote(paste(rho == . (r),)), side = 1, line = 3.7)
```

7. **Interpretace výsledků:**
   Na základě všech tří způsobů testování zamítáme hypotézu o shodě korelačního koeficientu šířky nosu a interorbitální šířky u mužů malajské populace s nulou. Mezi šířkou nosu a interorbitální šířkou mužů malajské populace existuje statisticky významná závislost. Interpretací výběrového korelačního koeficientu zjistíme, že mezi šířkou nosu a interorbitální šířkou existuje mírný stupeň přímé lineární závislosti ($\rho_2 = 0.4175$) (viz stupnice míry závislosti pro Pearsonův korelační koeficient, kapitola **??**).

★



Obrázek 29: Tečkový diagram s lineární regresní přímkou pro šířku nosu a interorbitální šířku mužů malajské populace (v mm)

Příklad 7.19. Test o korelačním koeficientu ρ
Mějme datový soubor 13-two-samples-correlations-trunk.txt, proměnnou lowex.L popisující délku dolní končetiny (v mm) a proměnnou tru.L popisující délku trupu (v mm) (viz sekce ??). Na hladině významnosti $\alpha = 0.01$ zjistěte, zda mezi délkou dolní končetiny a délky trupu žen existuje statisticky významná přímá lineární závislost.

Řešení příkladu 7.19
Zádání příkladu je shodné se zadáním příkladu 7.15. Taktéž datový soubor je totožný. Naším úkolem je porovnat korelační koeficient populace žen s konstantou $\rho_0 = 0$, tentokrát prostřednictvím jednovýběrového testu o nezávislosti. Předpokladem k použití tohoto testu je dvourozměrná normalita náhodného výběru délek dolní končetiny a délek trupu žen. Splnění tohoto předpokladu jsme ověřili v rámci řešení příkladu 7.15. Ze zadání příkladu víme, že máme zhodnotit, zda mezi délkou dolní končetiny a délky trupu žen existuje statisticky významná přímá lineární závislost. Protože ukazatelem přímé závislosti je kladná hodnota korelačního koeficientu, je naším úkolem zjistit, zda je korelační koeficient délky dolní končetiny a délky trupu žen větší než 0. Toto tvrzení je opět zněním alternativní hypotézy, zatímco nulovou hypotézu dodefinujeme jako doplněk k tomuto trvzení.

1. **Stanovení hypotéz**
   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
     H_0 : *Korelační koeficient proměnných délka dolní končetiny a délka trupu je menší nebo rovný 0.*
     H_1 : *Korelační koeficient proměnných délka dolní končetiny a délka trupu je větší než 0.*
   - **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
     $H_0 : \rho \leq 0$
     $H_1 : \rho > 0$
     (pravostranná alternativa)
2. **Volba hladiny významnosti**
   - Hladinu významnosti volíme $\alpha = 0.01$ (viz zadání příkladu).
3. **Testování kritickým oborem**
   - **Testovací statistika** K výpočtu testovací statistiky potřebujeme nejprve stanovit hodnotu výběrového korelačního koeficientu (viz funkce cor()). Hodnota výběrového korelačního koeficientu mezi šířkou nosu a interorbitální šířkou je $r = 0.2853$. Nyní již můžeme vypočítat hodnotu testovací statistiky

$$
\begin{aligned}
T_W &= \frac{\sqrt{n-2}R}{\sqrt{1-R^2}} \\
&= \frac{\sqrt{100-2} \times 0.285256}{\sqrt{1-0.285256^2}} \\
&= \frac{\sqrt{98} \times 0.285256}{\sqrt{0.918629}} \\
&= \frac{9.899495 \times 0.285256}{0.9584514} \\
&= 2.946305 \doteq 2.9463
\end{aligned}
$$

```r
data <- read.delim('00-Data\\13-two-samples-correlations-trunk.txt')
data.F <- data[data$sex == 'f', c('lowex.L', 'tru.L')]
data.F <- na.omit(data.F)
dim(data.F) # 100x2
lowex.LF <- data.F$lowex.L
tru.LF   <- data.F$tru.L
alpha    <- 0.01
r        <- cor(lowex.LF, tru.LF, method = 'pearson') # 0.285256
n        <- length(lowex.LF) # 100
tw       <- sqrt(n - 2) * r / sqrt(1 - r ^ 2) # 2.946305
```

- **Kritický obor**

$$\begin{aligned} W &= \langle t_{n-2}(1-\alpha)\,;\,\infty) \\ &= \langle t_{100-2}(1-0.01)\,;\,\infty) \\ &= \langle t_{98}(0.99)\,;\,\infty) \\ &= \langle 2.365002\,;\,\infty) \end{aligned}$$

```
qt(1 - alpha, n - 2) # 2.365002
```

- **Závěr testování**
  Protože realizace testovací statistiky $t_W = 2.9463$ náleží do kritického oboru, tj. $t_W \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.01$.

4. **Testování intervalem spolehlivosti**

- **Interval spolehlivosti**

$$\begin{aligned} (-1, h) &= \left(-1\,;\,\frac{t_{n-2}(1-\alpha)}{\sqrt{t^2_{n-2}(1-\alpha)+n-2}}\right) \\ &= \left(-1\,;\,\frac{t_{100-2}(1-0.01)}{\sqrt{t^2_{100-2}(1-0.01)+100-2}}\right) \\ &= \left(-1\,;\,\frac{t_{98}(0.99)}{\sqrt{t^2_{98}(0.99)+98}}\right) \\ &= \left(-1\,;\,\frac{2.365002}{\sqrt{103.5932}}\right) \\ &= \left(-1\,;\,\frac{2.365002}{10.17807}\right) \\ &= (-1\,;\,0.2323625) \end{aligned}$$

```
hh <- qt(1 - alpha, n - 2) / sqrt(qt(1 - alpha, n - 2) ^ 2 + n - 2) # 0.2323624
```

- **Závěr testování**
  Protože $r = 0.2853$ nenáleží do Waldova 99% empirického pravostranného intervalu spolehlivosti, tj. $r = 0.2853 \notin IS$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.01$.

5. **Testování p-hodnotou**

- **p-hodnota**

$$p\text{-hodnota} = \Pr(T_W > t_w) = 1 - \Pr(T_W \leq t_w) = 1 - \Pr(T_W \leq 2.946305) = 0.002009162 \doteq 0.00200916$$

```
1 - pt(tw, n - 2) # 0.002009162
```

- **Závěr testování**
  Protože p-hodnota $= 0.00200916$ je menší než $\alpha = 0.01$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.01$.

6. **Grafická vizualizace výsledků testování**
   Viz příklad 7.15.

7. **Interpretace výsledků:**
   Na základě všech tří způsobů testování zamítáme hypotézu H_0. Korelační koeficient délky dolní končetiny a délky trupu žen je statisticky významně větší než 0. To znamená, že mezi délkou dolní končetiny a délkou trupu žen existuje statisticky významná přímá závislost. Mezi oběma znaky existuje nízký stupeň přímé lineární závislosti ($\rho_1 = 0.2853$), který je statisticky významný. Ke stejnému závěru jsme dospěli též v příkladu 7.15.

★

Příklad 7.20. Test o korelačním koeficientu ρ

Mějme datový soubor 06-lin-uhl-fm.txt, proměnnou skull.H popisující výšku lebky v mm a proměnnou base.B popisující šířku lebeční báze na spojnici obou bodů porion v mm (viz sekce **??**). Na hladině významnosti $\alpha = 0.10$ zjistěte, zda mezi výškou lebky a šířkou lebeční báze žen existuje významná nepřímá závislost.

Řešení příkladu 7.20

Zádání příkladu je shodné se zadáním příkladu 7.20. Stejně tak datový soubor je totožný. Naším úkolem je porovnat korelační koeficient populace žen s konstantou $\rho_0 = 0$, a to prostřednictvím jednovýběrového testu o nezávislosti. Jeho jediným předpokladem je dvourozměrná normalita náhodného výběru výšek lebky a šířek lebeční báze žen, kterou jsme ověřili v rámci řešení příkladu 7.20. Podle zadání máme zjistit, zda mezi výškou lebky a šířkou lebeční báze žen existuje statisticky významná nepřímá lineární závislost. Ukazatelem nepřímé závislosti je záporná hodnota korelačního koeficientu. Naším úkolem je tedy zjistit, zda je korelační koeficient výšky lebky a šířky lebeční báze žen menší než 0, což je znění alternativní hypotézy.

```
data <- read.delim('00-Data\\06-lin-uhl-fm.txt')
data.F <- data[data$sex == 'f', c('skull.H', 'base.B')]
data.F <- na.omit(data.F)
dim(data.F) # 20x2
skull.HF <- data.F$skull.H
base.BF  <- data.F$base.B
range(skull.HF) # 115.4675-142.0617
range(base.BF)  # 108.5226-123.0860
```

1. **Stanovení hypotéz**
   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
     H_0 : *Korelační koeficient výšky lebky a šířky lebeční báze žen je větší nebo rovný 0.*
     H_1 : *Korelační koeficient výšky lebky a šířky lebeční báze žen je menší než 0.*
   - **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
     $H_0 : \rho \geq \rho_0$, kde $\rho_0 = 0$
     $H_1 : \rho < \rho_0$, kde $\rho_0 = 0$
     (levostranná alternativa)
2. **Volba hladiny významnosti**
   - Hladinu významnosti volíme v souladu se zadáním $\alpha = 0.10$.
3. **Testování kritickým oborem**
   - **Testovací statistika** Nejprve vypočítáme hodnotu výběrového korelačního koeficientu R výšky lebky a šířky lebeční báze ($r = -0.1713$). Nyní můžeme vypočítat testovací statistiku.

$$
\begin{aligned}
T_W &= \frac{\sqrt{n-2}R}{\sqrt{1-R^2}} \\
&= \frac{\sqrt{20-2} \times (-0.1712964)}{\sqrt{1-(-0.1712964)^2}} \\
&= \frac{\sqrt{18} \times (-0.1712964)}{\sqrt{0.9706575}} \\
&= \frac{4.242641 \times (-0.1712964)}{0.9852195} \\
&= -0.737652 \doteq -0.7377
\end{aligned}
$$

```
alpha <- 0.1
r <- cor(skull.HF, base.BF, method = 'pearson') # -0.1712964
```

```r
n <- length(skull.HF)
tw   <- sqrt(n - 2) * r / sqrt(1 - r ^ 2) # -0.737652
```

- **Kritický obor**

$$
\begin{aligned}
W &= (-\infty\,;\, t_{n-2}(\alpha/2)\rangle \\
&= (-\infty\,;\, t_{20-2}(0.10/2)\rangle \\
&= (-\infty\,;\, t_{18}(0.05)\rangle \\
&= (-\infty\,;\, -1.33039\rangle
\end{aligned}
$$

```r
qt(alpha, n - 2) # -1.330391
```

- **Závěr testování**
  Protože realizace testovací statistiky $t_W = -0.737652$ nenáleží do kritického oboru, tj. $t_W \notin W$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.10$.

4. **Testování intervalem spolehlivosti**

- **Interval spolehlivosti**

$$
\begin{aligned}
(d, 1) &= \left(\frac{t_{n-2}(\alpha)}{\sqrt{t^2_{n-2}(\alpha) + n - 2}}\,;\, 1 \right) \\
&= \left(\frac{t_{20-2}(0.10)}{\sqrt{t^2_{20-2}(0.10) + 20 - 2}}\,;\, 1 \right) \\
&= \left(\frac{t_{18}(0.10)}{\sqrt{t^2_{18}(0.10) + 18}}\,;\, 1 \right) \\
&= \left(\frac{-1.330391}{\sqrt{(-1.330391)^2 + 18}}\,;\, 1 \right) \\
&= \left(\frac{-1.330391}{\sqrt{19.76994}}\,;\, 1 \right) \\
&= \left(\frac{-1.330391}{4.44634}\,;\, 1 \right) \\
&= (-0.2992104\,;\, 1)
\end{aligned}
$$

```r
dh <- qt(alpha, n - 2) / sqrt(qt(alpha, n - 2) ^ 2 + n - 2) # -0.2992103
```

- **Závěr testování**
  Protože $r = -0.1713$ náleží do Waldova 90% empirického levostranného intervalu spolehlivosti, tj. $r = 0.1713 \in IS$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.10$.

5. **Testování p-hodnotou**

- **p-hodnota**

$$
p\text{-hodnota} = \Pr(T_w \leq t_w) = \Pr(T_w \leq -0.737652) = 0.230363 \doteq 0.23036
$$

```
pnorm(tw) # 0.230363
```

6. **Grafická vizualizace výsledků testování**
   Viz příklad 7.16.

7. **Interpretace výsledků:**
   Na základě všech tří způsobů testování nezamítáme hypotézu H_0. Korelační koeficient výšky lebky a šířky lebeční báze žen není statisticky významně menší než 0. Mezi výškou lebky a šířkou lebeční báze neexistuje statisticky významná nepřímá závislost. Interpretací výběrového korelačního koeficientu můžeme stanovit, že mezi oběma znaky existuje nízký stupeň nepřímé lineární závislosti ($\rho_1 = -0.1713$), který není statisticky významný. Ke stejnému závěru jsme dospěli také v příkladu 25.

★

7.7 Test o parametru p alternativního rozdělení

Nechť $X_1, \dots X_N$ je náhodný výběr sledující nastání úspěchu ($X_i = 1$), nebo nastání neúspěchu ($X_i = 0$) v i-tém náhodném pokusu, $i = 1, \dots, N$. Náhodný výběr $X_1, \dots X_N$ potom pochází z alternativního rozdělení, tj. $X \sim \mathrm{Alt}(p)$, kde p je pravděpodobnost nastání úspěchu v jednom náhodném pokusu. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujeme jednu z následujících tří hypotéz oproti příslušné alternativní hypotéze.

$$
\begin{array}{lcll}
H_{01} : p = p_0 & \text{oproti} & H_{11} : p \neq p_0 & \text{(oboustranná alt.)} \\
H_{02} : p \leq p_0 & \text{oproti} & H_{12} : p > p_0 & \text{(pravostranná alt.)} \\
H_{03} : p \geq p_0 & \text{oproti} & H_{13} : p < p_0 & \text{(levostranná alt.)}
\end{array}
$$

Test nazýváme testem o pravděpodobnosti p. Testovací statistika má tvar

$$
Z_W = \frac{M - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{N}}}, \tag{7.6}
$$

kde $M = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$, kde X_i nabývá hodnot 0 nebo 1, je výběrový průměr, N je rozsah náhodného výběru a p_0 je konstanta z nulové hypotézy. Testovací statistika Z_W pochází asymptoticky ze standardizovaného normálního rozdělení, tj.

$$
Z_W = \frac{M - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{N}}} \overset{\mathcal{A}}{\sim} N(0,1).
$$

To znamená, že pro malý rozsah náhodného výběru N nemusí mít rozdělení statistiky Z_W charakter standardizovaného normálního rozdělení. To je ale problém, neboť testování kritickým oborem, intervalem spolehlivosti i p-hodnotou je založeno na předpokladu, že Z_W má charakter standardizovaného normálního rozdělení. Proto pro malý rozsah náhodného výběru nemůžeme statistiku Z_W k testování nulové hypotézy použít, neboť závěry takového testování by mohly být mylné. S rostoucím rozsahem náhodného výběru N se však rozdělení statistiky Z_W čím dál více blíží ke standardizovanému normálnímu rozdělení, získává tak všechny jeho vlastnosti a závěry testování se stávají spolehlivě správnými.

Zda máme dostatečný počet pozorování k provedení testu o pravděpodobnosti p prověříme podmínkou dobré aproximace. Ta má tvar

$$
Np_0(1 - p_0) > 9 \tag{7.7}
$$

a pokud je splněna, můžeme test o pravděpodobnosti p použít, aniž bychom se vystavili riziku zavádějících výsledků testování. Pokud by však podmínka dobré aproximace nebyla splněna, nemůžeme test použít, dokud nerozšíříme náš datový soubor o další pozorování a nezvýšíme tak rozsah náhodného výběru N.

Poznámka: Problému s nedostatkem pozorování při použití testu o pravděpodobnosti p se můžeme vyvarovat, pokud si ve fázi plánování experimentu spočítáme minimální potřebný rozsah náhodného výběru N.Ve fázi sběru dat si potom již snadno ohlídáme, aby náš datový soubor obsahoval potřebný počet pozorování, ideálně s nějakou rezervou. K výpočtu minimálního rozsahu náhodného výběru potřebujeme znát pouze předpokládanou hodnotu pravděpodobnosti p_0 (viz příklady 7.25 a 7.26).

Kritický obor podle zvolené alternativní hypotézy má tvar

$$
\begin{array}{ll}
H_{11} : p \neq p_0 & W = \left(-\infty\,;\, u_{\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}\,;\, \infty\right) \\
H_{12} : p > p_0 & W = \langle u_{1-\alpha}\,;\, \infty) \\
H_{13} : p < p_0 & W = (-\infty\,;\, u_{\alpha}\rangle
\end{array}
$$

kde $u_{\alpha/2}$, $u_{1-\alpha/2}$, u_α, $u_{1-\alpha}$ jsou kvantily standardizovaného normálního rozdělení, jejichž hodnoty získáme pomocí R a implementované funkce `qnorm()`.

Interval spolehlivosti má podle zvolené alternativní hypotézy jeden z následujících tvarů

$$
\begin{aligned}
&H_{11}: p \neq p_0 &\qquad (d,h) &= \left(M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{N}}u_{1-\alpha/2}\,;\, M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{N}}u_{\alpha/2} \right) \\
&H_{12}: p < p_0 &\qquad (d,1) &= \left(M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{N}}u_{1-\alpha}\,;\, 1 \right) \\
&H_{13}: p > p_0 &\qquad (0,h) &= \left(0\,;\, M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{N}}u_{\alpha} \right)
\end{aligned}
$$

Poznámka: Protože parametr p značí pravděppodobnost úspěchu v jednom pokusu, platí, že $p \in (0;1)$, a tedy horní hranice levostranného intervalu spolehlivosti je 1. Analogicky dolní hranice pravostranného Waldova empirického intervalu spolehlivosti je 0.

p-hodnota má v závislosti na zvolené alternativní hypotéze jeden z následujících tvarů

$$
\begin{aligned}
&H_{11}: p \neq p_0 &\qquad &p\text{-hodnota} = 2\min\{\Pr(Z_W \leq z_W)\,,\, \Pr(Z_W > z_W)\} \\
&H_{12}: p > p_0 &\qquad &p\text{-hodnota} = \Pr(Z_W > z_W) = 1 - \Pr(Z_W \leq z_W) \\
&H_{13}: p < p_0 &\qquad &p\text{-hodnota} = \Pr(Z_W \leq z_W)
\end{aligned}
$$

kde Z_W je náhodná veličina, z_W je realizace testovací statistiky Z_W (viz vzorec 7.6), tedy konkrétní číslo, a $\Pr(Z_W \leq z_W)$ je distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení, jejíž hodnotu získáme pomocí R a implementované funkce pnorm().

Příklad 7.21. Test o parametru p alternativního rozdělení
Mějme datový soubor 25-one-sample-probability-dermatoglyphs.txt obsahující údaje o frekvenci výskytu dermatoglyfického vzoru *smyčka* na prstech 235 jedinců populace z Bagathů z Araku Valley (viz sekce **??**). Současně máme k dispozici hodnotu pravděpodobnosti výskytu dermatoglyfického vzoru *smyčka* u jedinců z populace Lambadis ($p_m = 0.5618$, $p_f = 0.6233$). Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ zjistěte, zda existuje rozdíl mezi frekvencemi výskytu dermatoglyfického vzoru *smyčka* u mužů bagathské populace z Araku Valley a mužů z populace Lambadis.

Řešení příkladu 7.21
Příkazem read.delim() načteme datový soubor, přičemž nastavením argumentu row.names = 1 specifikujeme, že první sloupec tabulky má být zvolen jako záhlaví řádků. Pomocí funkce sum() zjistíme celkový počet všech pozorování. Dále, aplikováním funkce FUN = sum na sloupce (MARGIN = 2) tabulky data prostřednictvím příkazu apply() zjistíme počet údajů pro muže a pro ženy.

```
(data <- read.delim('00-Data\\25-one-sample-probability-dermatoglyphs.txt',
                    row.names = 1))
```

```
         m    f
whorl 1053  880
loop  1246 1349
arch    51  121
```

```
sum(data) # 4700
apply(data, MARGIN = 2, FUN = sum) # m 2350 # f 2350
```

Z tabulky vidíme, že z celkového počtu 4 700 otisků patří 2 350 otisků mužům, čemuž odpovídá 10 otisků prstů na jednoho jedince mužského pohlaví. Z celkového počtu 2 350 otisků byl na 1246 otiscích rozpoznán vzor *smyčka* a na zbylých 1104 otiscích byl rozeznán jiný vzor než *smyčka* (tj. *oblouček* nebo *vír*). Rozsah náhodného výběru $N = 2350$.

Naším úkolem je porovnat frekvenci výskytu dermatoglyfického vzoru *smyčka* dvou indických populací. U bagathské populace máme k dispozici počet úspěchů, tj. počet výskytů vzoru *smyčka* na 2 350 prstech. Náhodná veličina X popisující frekvenci výskytu vzorů *smyčka* u mužů bagathské poulace tedy pochází z alternativního rozdělení, tj. $X \sim \mathrm{Alt}(p)$, kde p je pravděpodobnost nastání úspěchu, tedy pravděpodonost výskytu vzoru *smyčka*. Druhá, populace z Lambadis je reprezentována pouze pravděpodobností ($p_m = 0.5618$). Řešení příkladu vede na situaci, kdy pravděpodobnost p porovnáváme s konstantou 0.5618, tedy na jednovýběrový test o parametru p alternativního rozdělení. K použití tohoto testu je nejprve potřeba ověřit podmínku dobré aproximace pro náhodný výběr mužů bagathské populace, což znamená ověřit, zda platí $Np_0(1 - p_0) > 5$, kde $p_0 = 0.5618$.

$$Np_0(1 - p_0) = 2350 \times 0.5618 \times (1 - 0.5618) = 2350 \times 0.5618 \times 0.4382 = 578.5248.$$

Jelikož $578.5248 > 5$, je podmínka dobré aproximace pro muže bagathské populace splněna.

```
N <- 2350
x <- 1246
p0 <- 0.5618
N*p0*(1-p0) # 578.5248
```

Protože je podmínka dobré aproximace pro muže bagathské populace splněna, můžeme se zaměřit na otázku ze zadání. Naším úkolem je zjistit, zda existuje rozdíl mezi frekvencemi výskytu dermatoglyfického vzoru *smyčka* u mužů bagathské populace z Araku Valley a mužů z populace Lambadis. Toto tvrzení je zněním alternativní hypotézy, neboť rozdíl implikuje nerovnost a nerovnost je vždy součástí alternativní hypotézy. Zbývá dodefinovat nulovou hypotézu. Proces testování provedeme v posloupnosti šesti kroků.

1. **Stanovení hypotéz**

   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
     H_0 : *Frekvence výskytu dermatoglyfického vzoru smyčka u mužů bagahtské populace a populace Lambadis*

jsou shodné.
H_1 : *Frekvence výskytu dermatoglyfického vzoru smyčka u mužů bagahtské populace a populace Lambadis nejsou shodné.*

- **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
  $H_0 : p = p_0$, kde $p_0 = 0.5618$
  $H_1 : p \neq p_0$, kde $p_0 = 0.5618$
  (oboustranná alternativa)

2. **Volba hladiny významnosti**

- Hladinu významnosti volíme v souladu se zadáním $\alpha = 0.05$.

3. **Testování kritickým oborem**

- **Testovací statistika**

$$\begin{aligned} Z_W &= \frac{M - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{N}}} \\ &= \frac{0.5302128 - 0.5618}{\sqrt{\frac{0.5618(1-0.5618)}{2350}}} \\ &= \frac{-0.0315872}{\sqrt{\frac{0.5618 \times 0.4382}{2350}}} \\ &= \frac{-0.0315872}{\sqrt{0.0001047578}} \\ &= \frac{-0.0315872}{0.01023512} \\ &= -3.086158 \doteq -3.08616 \end{aligned}$$

```
alpha <- 0.05
m <- x / N #0.5302128
zw <- (m - p0) / (sqrt(p0 * (1 - p0) / N)) # -3.08616
```

- **Kritický obor**

$$\begin{aligned} W &= \big(-\infty\,;\, u_{\alpha/2}\big\rangle \cup \big\langle u_{1-\alpha/2}\,;\, \infty\big) \\ &= \big(-\infty\,;\, u_{0.05/2}\big\rangle \cup \big\langle u_{1-0.05/2}\,;\, \infty\big) \\ &= (-\infty\,;\, u_{0.025}\rangle \cup \langle u_{0.975}\,;\, \infty) \\ &= (-\infty\,;\, -1.9560\rangle \cup \langle 1.9560\,;\, \infty) \end{aligned}$$

```
qnorm(alpha / 2) # -1.959964
qnorm(1 - alpha / 2) # 1.959964
```

- **Závěr testování**
  Protože realizace testovací statistiky $z_W = -3.08616$ náleží do kritického oboru, tj. $z_W \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

4. **Testování intervalem spolehlivosti**

- **Interval spolehlivosti**

$$
\begin{aligned}
(d,h) &= \left(M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{N}} u_{1-\alpha/2}\,;\, M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{N}} u_{\alpha/2}\right) \\
&= \left(0.5302128 - \sqrt{\frac{0.5302128(1-0.5302128)}{2350}} u_{1-0.05/2}\,;\, 0.5302128 - \sqrt{\frac{0.5302128(1-0.5302128)}{2350}} u_{0.05/2}\right) \\
&= \left(0.5302128 - \sqrt{\frac{0.5302128 \times 0.4697872}{2350}} u_{0.975}\,;\, 0.5302128 - \sqrt{\frac{0.5302128 \times 0.4697872}{2350}} u_{0.025}\right) \\
&= \left(0.5302128 - \sqrt{0.0001059945} \times 1.959964\,;\, 0.5302128 - \sqrt{0.0001059945} \times (-1.959964)\right) \\
&= (0.5302128 - 0.01029536 \times 1.959964\,;\, 0.5302128 - 0.01029536 \times (-1.959964)) \\
&= (0.5100343\,;\, 0.5503913)
\end{aligned}
$$

```
dh <- m - sqrt(m * (1 - m) / N) * qnorm(1 - alpha / 2) # 0.5100342
hh <- m - sqrt(m * (1 - m) / N) * qnorm(alpha / 2) # 0.5503913
```

- **Závěr testování**
  Protože $p_0 = 0.5618$ nenáleží do Waldova 95% empirického oboustranného intervalu spolehlivosti, tj. $p_0 = 0.5618 \notin IS$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

5. **Testování p-hodnotou**

- **p-hodnota**

$$
\begin{aligned}
p\text{-hodnota} &= 2\min\{\Pr(Z_W \leq z_W)\,,\, \Pr(Z_W > z_W)\} \\
&= 2\min\{\Pr(Z_W \leq z_W)\,,\, 1 - \Pr(Z_W \leq z_W)\} \\
&= 2\min\{\Pr(Z_W \leq -3.08616)\,,\, 1 - \Pr(Z_W \leq -3.08616)\} \\
&= 2\min\{0.001013798\,,\, 0.9989862\} \\
&= 2 \times 0.001013798 = 0.002027595 \doteq 0.0020276
\end{aligned}
$$

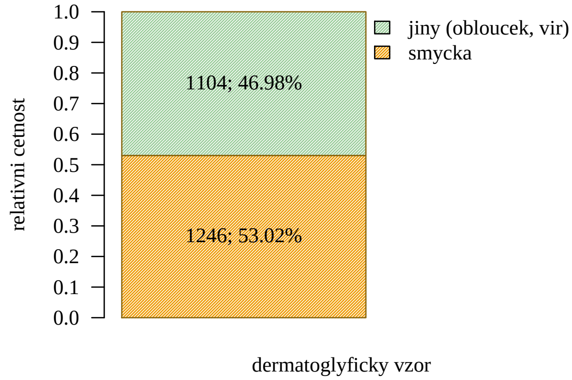
```
p.val <- 2 * min (pnorm(zw), 1 - pnorm(zw)) # 0.002027595
```

- **Závěr testování**
  Protože p-hodnota $= 0.0020276$ je menší než $\alpha = 0.05$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

6. **Grafická vizualizace výsledků testování**
   Výsledek testování vizualizujeme pomocí sloupcového diagramu relativních četností, který vygenerujeme příkazem rel.barplot(). Funkce rel.barplot() je implementována v RSkriptu Sbirka-AS-I-2018-funkce.R. Před použitím samotné funkce je tedy potřeba načíst RSkript příkazem source().

```
source('Sbirka-AS-I-2018-funkce.R')
par(mar = c(5, 4, 1, 1), family = 'Times')
rel.barplot(c(x, N - x), col = c('orange2', 'darkseagreen3'),
                border = 'goldenrod4',
                names = c('smycka', 'jiny (obloucek, vir)'),
                density = 60, main = '',
                xlab = 'dermatoglyficky vzor', ylab = 'relativni cetnost')
```

7. **Interpretace výsledků:** Na základě všech tří způsobů testování zamítáme hypotézu H_0. Mezi frekvencí výskytu dermatoglyfického znaku *smyčka* u mužů baghatské populace z Araku Valley a frekvěncí výskytu vzoru *smyčka* u mužů z populace Lambadis existuje statisticky významný rozdíl.



Obrázek 30: Sloupcový diagram relativních četností zastoupení dermatoglyfického vzoru *smyčka* v populaci bagathských mužů z Araku Valley

★

Příklad 7.22. Test o parametru p alternativního rozdělení
Mějme k dispozici údaje o frekvenci výskytu epigenetického znaku *sutura metopica* (binomické proměnná) na lebkách Ainů z ostrova Hokkaido (viz datový soubor 09-one-sample-probability-sutmet.txt a jeho popis v sekci ??). Dále mějme k dispozici údaje o výskytu epigenetického znaku *sutura metopica* na lebkách jedinců ze současné japonské populace ($p_{jap} = 0.091$). Na hladině významnosti $\alpha = 0.01$ zjistěte, zda je frekvence výskytu epigenetického znaku *sutura metopica* u populace Ainů statisticky významně nižší než u současné japonské populace.

Řešení příkladu 7.21
Příkazem read.delim() načteme datový soubor, přičemž nastavením argumentu row.names = 1 specifikujeme, že první sloupec tabulky má být zvolen jako záhlaví řádků.

```
(data <- read.delim('00-Data/09-one-sample-probability-sutmet.txt',
                    row.names = 1))
```

```
      n met
Ain 184   6
```

Z tabulky vidíme, že z celkového počtu 184 lebek populace Ainů byl zaznamenán výskyt epigenetického znaku *sutura metopica*) na 6 lebkách. Rozsah náhodného výběru lebek Ainské populace $N = 184$.

Naším úkolem je porovnat frekvenci výskytu epigenetického znaku *sutura metopica* dvou japonských populací. U populace Ainů máme k dispozici počet úspěchů, tj. počet výskytů epigenetického znaku *sutura metopica* u 184 lebek. Náhodná veličina X popisující frekvenci výskytu znaku *sutura metopica* u mužů populace Ainů tedy pochází z alternativního rozdělení, tj. $X \sim \mathrm{Alt}(p)$, kde p je pravděpodobnost nastání úspěchu, tedy pravděpodonost výskytu znaku *sutura metopica*. Současná japonské populace je oproti tomu reprezentována pouze pravděpodobností ($p_{jap} = 0.091$). Řešení příkladu vede na situaci, kdy pravděpodobnost p porovnáváme s konstantou 0.091, tedy na jednovýběrový test o parametru p alternativního rozdělení. Před použitím tohoto testu nejprve ověříme podmínku dobré aproximace pro náhodný výběr mužů populace Ainů, tj. $Np_0(1 - p_0) > 5$, kde $p_0 = 0.091$.

$$Np_0(1 - p_0) = 184 \times 0.091 \times (1 - 0.091) = 184 \times 0.091 \times 0.909 = 15.2203.$$

```
N <- 184
x <- 6
p0 <- 0.091
N * p0 * (1 - p0) # 15.2203
```

Jelikož číslo $15.2203 > 5$, je podmínka dobré aproximace pro populaci Ainů splněna a my se můžeme zaměřit na řešení otázky ze zadání. Zde poznamenejme, že v zadání příkladu není zmínka o znění nulové hypotézy, pouze o záměru zjistit, zda je frekvence výskytu znaku *sutura metopica* u populace Ainů nižší než u současké japonské populace. Toto tedy bude znění alternativní hypotézy, zatímco nulovou hypotézu musíme vhodně dodefinovat.

1. **Stanovení hypotéz**
   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
     H_0 : *Frekvence výskytu epigenetického znaku sutura metopica u populace Ainů je vyšší nebo rovna frekvenci znaku sutura metopica u současné japonské populace.*
     H_1 : *Frekvence výskytu epigenetického znaku sutura metopica u populace Ainů je nižší než u současné japonské populace.*
   - **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
     $H_0 : p \geq p_0$, kde $p_0 = 0.091$
     $H_1 : p < p_0$, kde $p_0 = 0.091$
     (levostranná alternativa)
2. **Volba hladiny významnosti**
   - Hladina významnosti $\alpha = 0.01$ (viz zadání příkladu).

3. **Testování kritickým oborem**

- **Testovací statistika**

$$
\begin{aligned}
Z_W &= \frac{M - p_0}{\sqrt{\frac{M(1-M)}{N}}} \\
&= \frac{0.0326087 - 0.091}{\sqrt{\frac{0.091(1-0.091)}{184}}} \\
&= \frac{-0.0583913}{\sqrt{\frac{0.082719}{184}}} \\
&= \frac{-0.0583913}{\sqrt{0.0004495598}} \\
&= \frac{-0.0583913}{0.02120283} \\
&= -2.753939 \doteq -2.75394
\end{aligned}
$$

```
alpha <- 0.01
m <- x / N # 0.0326087
zw <- (m - p0) / (sqrt(p0 * (1 - p0) / N)) # -2.75394
```

- **Kritický obor**

$$
\begin{aligned}
W &= (-\infty\,;\, u_\alpha\rangle \\
&= (-\infty\,;\, u_{0.01}\rangle \\
&= (-\infty\,;\, -2.3263\rangle
\end{aligned}
$$

```
qnorm(alpha) # -2.326348
```

- **Závěr testování**
Protože realizace testovací statistiky $z_W = -2.75394$ náleží do kritického oboru, tj. $z_W \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.01$.

4. **Testování intervalem spolehlivosti**

- **Interval spolehlivosti**

$$
\begin{aligned}
(-1, h) &= \left(0\,;\, m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{N}}u_\alpha\right) \\
&= \left(0\,;\, 0.0326087 - \sqrt{\frac{0.0326087(1-0.0326087)}{184}}u_{0.01}\right) \\
&= \Big(0\,;\, 0.0326087 - \sqrt{0.0001714422} \times (-2.326348)\Big) \\
&= (0\,;\, 0.0326087 - 0.01309359 \times (-2.326348)) \\
&= (0\,;\, 0.06306895) \doteq (0\,;\, 0.063069)
\end{aligned}
$$

```
HH <- m - sqrt(m * (1 - m) / N) * qnorm(alpha) # 0.06306895
```

- **Závěr testování**
  Protože $p_0 = 0.091$ nenáleží do Waldova 99% empirického pravostranného intervalu spolehlivosti, tj. $p_0 = 0.091 \notin IS$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.01$.

5. **Testování p-hodnotou**

- **p-hodnota**

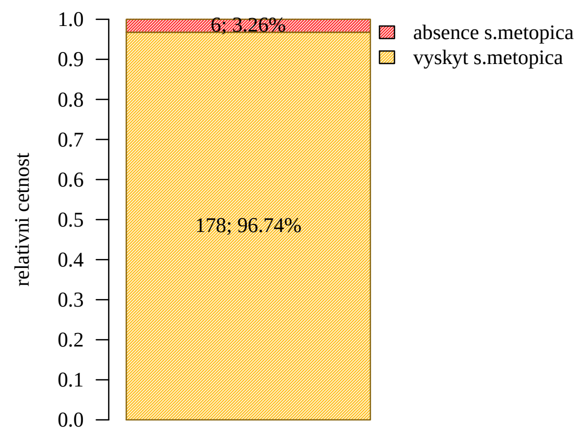
$$
\begin{aligned}
p\text{-hodnota} &= \Pr(Z_W \leq z_W) \\
&= \Pr(Z_W \leq -2.326348) \\
&= 0.002944129 \doteq 0.002944
\end{aligned}
$$

```
p.val <- pnorm(zw) # 0.002944129
```

- **Závěr testování**
  Protože p-hodnota $= 0.002944$ je menší než $\alpha = 0.01$, H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.01$.

6. **Grafická vizualizace výsledků testování**
   Výsledek testování vizualizujeme pomocí sloupcového diagramu relativních četností, který vygenerujeme příkazem rel.barplot().

```
source('Sbirka-AS-I-2018-funkce.R')
par(mar = c(1, 4, 1, 1), family = 'Times')
rel.barplot(c(N - 6, 6), col = c('goldenrod1', 'firebrick1'),
            border = 'goldenrod4',
            names = c('vyskyt s.metopica', 'absence s.metopica'),
            density = 60, main = '',
            xlab = '', ylab = 'relativni cetnost')
```



Obrázek 31: Sloupcový diagram relativních četností zastoupení epigenetického znaku *sutura metopica* v populaci Ainů

7. **Interpretace výsledků:** Na základě všech tří způsobů testování zamítáme hypotézu H_0. Frekvence výskytu epigenetického znaku *sutura metopica* u populace Ainů je statisticky významně menší než u současné japonské populace.

★

Příklad 7.23. Test o parametru p alternativního rozdělení
Pravděpodobnost narození chlapce je o něco málo vyšší, než pravděpodobnost narození děvčete (obecný poměr je 51:49). V datovém souboru 08-one-sample-probability-sexratio.txt jsou uvedeny údaje o pohlaví novorozenců narozených během jednoho roku v jedné krajské nemocnici (viz sekce **??**). Potvrzují nasbírané údaje tvrzení, že se v tomto okresu rodí statisticky významně více chlapců než děvčat? Hladinu významnosti zvolte $\alpha = 0.05$.

Řešení příkladu 7.23
Příkazem read.delim() načteme datový soubor. Pomocí funkce head() vypíšeme první čtyři řádky z načtené tabulky. Tabulka obsahuje pouze jeden sloupec sex obsahující údaje o binární proměnné *pohlaví* s kódováním m = muž a f = žena. Pomocí příkazu table() zjistíme, kolik pozorování přísluší každé variantě znaku sex.

```
data <- read.delim('00-Data\\08-one-sample-probability-sexratio.txt')
head(data, n = 4)
```

```
  sex
1   m
2   m
3   f
4   m
```

```
table(data)
```

```
data
  f   m
674 729
```

V krajské nemocnici se v průběhu jednoho roku narodilo celkem 729 chlapců a 674 děvčat. Rozsah náhodného výběru $N = 1403$.

Naším úkolem je porovnat frekvenci výskytu narození chlapců s konstantou 0.5. Ta reprezentuje 50 % šanci na narození chlapce a 50% šanci na narození děvčete. K dispozici máme počet úspěchů, tj. počet narozených chlapců z 1403 narozených jedinců. Náhodná veličina X popisující narození chlapce tedy pochází z alternativního rozdělení, tj. $X \sim \mathrm{Alt}(p)$, kde p je pravděpodobnost nastání úspěchu, tedy pravděpodonost narození chlapce. Řešení příkladu vede na situaci, kdy pravděpodobnost p porovnáváme s konstantou 0.5, tedy na jednovýběrový test o parametru p alternativního rozdělení. K použití tohoto testu je nejprve potřeba ověřit podmínku dobré aproximace, tj. ověřit, zda platí $Np_0(1 - p_0) > 5$, kde $p_0 = 0.5$.

$$Np_0(1 - p_0) = 1403 \times 0.5 \times (1 - 0.5) = 1403 \times 0.5 \times 0.5 = 350.75.$$

Jelikož $350.75 > 5$, je podmínka dobré aproximace splněna.

```
N <- 1403
x <- 729
p0 <- 0.5
N * p0 * (1 - p0) # 350.75
```

Protože podmínka dobré aproximace je splněna, můžeme se zaměřit na otázku ze zadání. Naším úkolem je zjistit, zda se ve sledovaném okrese rodí statisticky významně více chlapců než děvčat. Toto tvrzení odpovídá hypotéze, že frekvence narození chlapců je větší 0.5 a je zněním alternativní hypotézy, neboť v zadání není zmínka, že máme testovat hypotézu nebo nulovou hypotézu. Zbývá tedy dodefinovat znění H_0.

1. **Stanovení hypotéz**
   - **slovní formulace** nulové a alternativní hypotézy
     H_0 : *Frekvence výskytu narození chlapce je menší nebo rovna 0.5.*
     H_1 : *Frekvence výskytu narození chlapce je větší než 0.5.*

- **matematická formulace** nulové a alternativní hypotézy
  $H_0 : p \leq p_0$, kde $p_0 = 0.5$
  $H_1 : p > p_0$, kde $p_0 = 0.5$
  (pravostranná alternativa)

2. **Volba hladiny významnosti**

   - Hladinu významnosti volíme v souladu se zadáním $\alpha = 0.05$.

3. **Testování kritickým oborem**

   - **Testovací statistika**

$$\begin{aligned} Z_W &= \frac{M - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{N}}} \\ &= \frac{0.5196009 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{1403}}} \\ &= \frac{0.0196009}{\sqrt{\frac{0.25}{1403}}} \\ &= \frac{0.0196009}{\sqrt{0.0001047578}} \\ &= \frac{0.0196009}{0.01334877} \\ &= 1.468367 \doteq 1.4684 \end{aligned}$$

```
alpha <- 0.05
m <- x / N # 0.5196009
zw <- (m - p0) / (sqrt(p0 * (1 - p0) / N)) # 1.468364
```

   - **Kritický obor**

$$\begin{aligned} W &= \langle u_{1-\alpha}\, ; \infty) \\ &= \langle u_{1-0.05}\, ; \infty) \\ &= \langle u_{0.95}\, ; \infty) \\ &= \langle 1.6449\, ; \infty) \end{aligned}$$

```
qnorm(1 - alpha) # 1.644854
```

   - **Závěr testování**
     Protože realizace testovací statistiky $z_W = 1.4684$ nenáleží do kritického oboru, tj. $z_W \notin W$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

4. **Testování intervalem spolehlivosti**

- **Interval spolehlivosti**

$$
\begin{aligned}
(d, h) &= \left(M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{N}} u_{1-\alpha/2}\,; 1\right) \\
&= \left(0.5196009 - \sqrt{\frac{0.5196009(1-0.5196009)}{1403}} u_{1-0.05}\,; 1\right) \\
&= \left(0.5196009 - \sqrt{\frac{0.5196009 \times 0.4803991}{1403}} u_{0.95}\,; 1\right) \\
&= \left(0.5196009 - \sqrt{0.0001779158} \times 1.644854\,; 1\right) \\
&= (0.5196009 - 0.01333851 \times 1.644854\,; 1) \\
&= (0.497661\,; 1)
\end{aligned}
$$

```
dh <- m - sqrt(m * (1 - m) / N) * qnorm(1 - alpha) # 0.497661
```

- **Závěr testování**
  Protože $p_0 = 0.5$ náleží do Waldova 95% empirického levostranného intervalu spolehlivosti, tj. $p_0 = 0.5 \in IS$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

5. **Testování p-hodnotou**

- **p-hodnota**

$$
p\text{-hodnota} = 1 - \Pr(Z_W \leq z_W)\} = 1 - \Pr(Z_W \leq 1.468364)\} = 0.07100263 \doteq 0.0710026
$$

```
p.val <- 1 - pnorm(zw) # 0.07100263
```

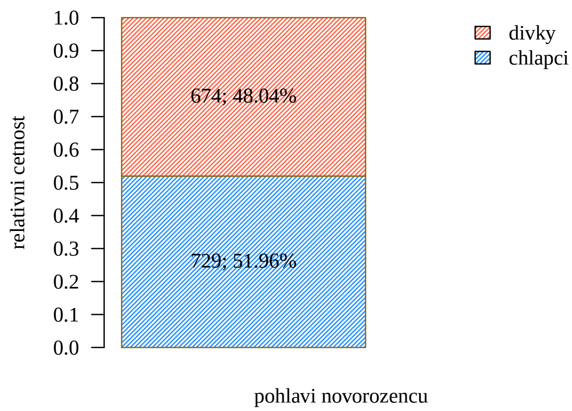
- **Závěr testování**
  Protože p-hodnota $= 0.07100263$ je větší než $\alpha = 0.05$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

6. **Grafická vizualizace výsledků testování**
   Výsledek testování vizualizujeme pomocí sloupcového diagramu relativních četností.

```
source('Sbirka-AS-I-2018-funkce.R')
par(mar = c(4, 4, 1, 1), family = 'Times')
rel.barplot(c(x, N - x), col = c('dodgerblue', 'tomato'),
                border = 'goldenrod4',
                names = c('chlapci', 'divky'),
                density = 40, main = '',
                xlab = 'pohlavi novorozencu', ylab = 'relativni cetnost')
```

7. **Interpretace výsledků:** Na základě všech tří způsobů testování nezamítáme hypotézu H_0. Nasbírané údaje nepotvrzují, že by se ve sledovaném kraji rodilo statisticky významně více chlapců než děvčat.

★



Obrázek 32: Sloupcový diagram relativních četností zastoupení narození chlapce a děvčete v krajské nemocnici během jednoho roku

Příklad 7.24. Test o parametru p alternativního rozdělení
Mějme k dispozici údaje o frekvenci výskytu epigenetického znaku *sutura metopica* (binomické proměnná) na lebkách jedinců z Anatolské populace z oblasti Erzurum. Z celkového počtu 47 jedinců byl zaznamenán výskyt tohoto znaku u 7 jedinců. Dále mějme k dispozici údaje o výskytu epigenetického znaku *sutura metopica* na lebkách jedinců z moderní Anatolské populace ($p_a = 0.093$). Na hladině významnosti $\alpha = 0.10$ testujte hypotézu, že frekvence výskytu epigenetického znaku *sutura metopica* u Anatolské populace z oblasti Erzurum je menší nebo rovna frekvenci výskytu epigenetického znaku *sutura metopica* u moderní Anatolské populace.

Řešení příkladu 7.23
Nejprve si do proměnné `N` vložíme celkový počet jedinců (rozsah náhodného výběru $N = 47$) a do proměnné `x` vložíme počet úspěchů, tj. počet výskytů epigenetického znaku *sutura metopica* na 47 zkoumaných lebkách ($x = 7$). Náhodná veličina X popisující počet výskytů epigenetického znaku *sutura metopica* pochází z Alternativního rozdělení, tj. $X \sim \text{Alt}(p)$, kde p je pravděpodobnost úspěchu, tj. pravděodobnost výskytu epigenetického znaku *sutura metopica*.

```
N <- 47
x <- 7
```

Naším úkolem je porovnat frekvenci výskytu epigenetického znaku *sutura metopica* u dvou Anatolských populací. U populace z oblasti Erzurum máme k dispozici počet úspěchů. Naopak u moderní Anatolské ppopulace máme k dispozici pouze pravděpodobnost výskytu ($p_a = 0.093$). Řešení příkladu vede na situaci, kdy pravděpodobnost p porovnáváme s konstantou 0.093, tedy na jednovýběrový test o parametru p alternativního rozdělení. Před použitím testu nejprve ověříme podmínku dobré aproximace, tj. zda $Np_0(1 - p_0) > 5$, kde $p_0 = 0.093$.

$$Np_0(1 - p_0) = 47 \times 0.093 \times (1 - 0.093) = 47 \times 0.093 \times 0.907 = 3.9645.$$

Jelikož $3.9645 < 5$, podmínka dobré aproximace není splněna a k otestování hypotézy ze zadání není tedy možné použít test o parametru p alternativního rozdělení.

Poznámka: Protože rozsah náhodného výběru není dostatečně velký, nemůžeme k testování hypotézy ze zadání použít parametrický test. V opačném případě by získané výsledky nebyly spolehlivé. Jedinou možností, jak získat spolehlivé výsledky je rozšířit datový soubor o další pozorování. Tomuto procesu bychom se vyhnuli, kdybychom v počáteční fázi plánování experimentu spočítali, jak minimálně velký rozsah náhodného výběru je potřeba získat, aby byla podmínka dobré aproximace splněna a výsledky stanovné za základě testu o parametru p byly spolehlivé (viz příklady 7.25 a 7.26). ★

Příklad 7.25. Test o parametru p alternativního rozdělení
Mějme k dispozici údaje o frekvenci výskytu polydaktylie u jedinců Československé populace z roku 1966 ($p_{cs} = 0.0005$, $N_{cs} = 20\,074$). Dále předpokládejme, že náhodný výběr X popisující výskyt polydaktylie u jedinců Polské populace pochází z Alternativního rozdělení, tj. $X \sim \text{Alt}(p)$, kde p je pravděpodobnost výskytu polydaktylie u jedinců Polské populace. Vypočítejte, jak velký minimální rozsah náhodného výběru je potřeba k otestování hypotézy o shodě frekvence výskytu polydaktilie u jedinců Československé a Polské populace.

Řešení příkladu 7.25
Naším úkolem je porovnat frekvenci výskytu polydaktylie u Československé a Polské populace, přičemž momentálně jsme ve fázi plánování experimentu. Zatímco u Polské populace budeme mít po nasbírání dat k dispozici údaje o počtu úspěchů, tj. o počtu výskytů polydaktilie u Československé populace máme k dispozici údaj o výskytu polydaktylie z roku 1966 ($p = 0.0005$). Celá studie spěje k situaci, kdy budeme porovnávat pravděpodobnost p s konstantou 0.0005, tedy na jednovýběrový test o parametru p alternativního rozdělení. K tomu, abychom tento test mohli použít, potřebujeme, aby byla splněna podmínka dobré aproximace, tj. aby $Np_0(1-p_0) > 5$, kde $p_0 = 0.0005$. Z nerovnice si tedy vyjádříme a následně dopočítáme hodnotu N.

$$
\begin{aligned}
Np_0(1-p_0) &> 5 \\
N &> \frac{5}{p_0(1-p_0)} \\
N &> \frac{5}{0.0005(1-0.0005)} \\
N &> \frac{5}{0.0005 \times 0.9995} \\
N &> 10\,005
\end{aligned}
$$

```
p0 <- 0.0005
5 / (p0 * (1 - p0)) # 10005
```

Aby byla splněna podmínka dobré aproximace, je potřeba získat jako základ k otestování nulové hypotézy ze zadání náhodný výběr o rozsahu alespoň 10 006 jedinců. ★

Příklad 7.26. Test o parametru p alternativního rozdělení
Mějme k dispozici údaje o frekvenci výskytu dermatoglyfického vzoru *vír* na palci pravé ruky u mužů České populace ($p_{cs} = 0.533$). Dále předpokládejme, že náhodný výběr X popisující výskyt dermatoglyfického vzoru *vír* na palci pravé ruky u mužů Slovenské populace pochází z Alternativního rozdělení, tj. $X \sim \mathrm{Alt}(p)$, kde p je pravděpodobnost výskytu dermatoglyfického vzoru *vír* na palci pravé ruky u mužů Slovenské populace. Vypočítejte, jak velký minimální rozsah náhodného výběru je potřeba k otestování hypotézy, že frekvence výskytu vzoru *vír* na palci pravé ruky mužů Slovenské populace je větší nebo rovna frekvenci výskytu vzoru *vír* na palci pravé ruky mužů České populace.

Řešení příkladu 7.26
Naším úkolem je porovnat frekvenci výskytu vzoru *vír* na palci pravé ruky mužů České a Slovenské populace, přičemž jsme teprve ve fázi plánování experimentu. Zatímco u Slovenské populace budeme mít po nasbírání dat disponovat údaji o počtu úspěchů, tj. o počtu výskytů dermatoglifického vzoru *vír* na palci pravé ruky u mužů Slovenské populace, u mužů České populace máme k dispozici pouze pravděpodobnost výskytu vzoru *vír* na palci pravé ruky ($p = 0.533$). Celá studie spěje k případu porovnávání pravděpodobnosti p s konstantou 0.533, tedy na jednovýběrový test o parametru p alternativního rozdělení. K použití tohoto testu, potřebujeme splnit podmínka dobré aproximace, tj. zajistit, aby $Np_0(1 - p_0) > 5$, kde $p_0 = 0.533$.

$$
\begin{aligned}
Np_0(1 - p_0) &> 5 \\
N &> \frac{5}{p_0(1 - p_0)} \\
N &> \frac{5}{0.533(1 - 0.533)} \\
N &> \frac{5}{0.533 \times 0.467} \\
N &> 20.0875
\end{aligned}
$$

```r
p0 <- 0.533
5 / (p0 * (1 - p0)) # 20.0875
```

Aby byla splněna podmínka dobré aproximace, je potřeba získat jako základ k otestování nulové hypotézy ze zadání náhodný výběr o rozsahu alespoň 21 jedinců. ★

Poznámka: Z příkladů 7.25 a 7.26 vidíme, že rozsah náhodného výběru závisí pouze na očekávané pravděpodobnosti p_0 z nulové hypotézy. Čím je p_0 blíže k 0 nebo 1, tím větší počet pozorování bude potřeba k zajištění podmínky dobré aproximace. Naopak, čím bude hodnota p_0 blíže k číslu 0.5, tím menší rozsah náhodného výběru je potřebný ke splnění podmínky dobré aproximace.