

2. vnitrosemestrální písemka – MIN101 – podzim 2019 – 26. 11.

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovizeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (1 bod) Mějme matici A s parametry $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \\ c & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Určete parametry a, b, c tak, aby řádky této matice tvořily ortogonální bázi \mathbb{R}^3 .
b) Určete parametry a, b, c tak, aby matice A měla vlastní vektor $w = (1, 0, 2)$ a zároveň měla nulový determinant.
c) Rozhodněte, zda existují parametry a, b, c takové, že homogenní soustava rovnic s maticí A má dvoudimenzionální prostor řešení.
2. (1 bod) Necht' φ je lineární zobrazení prostoru \mathbb{R}^3 do sebe, které je symetrií podle přímky p (tj. osová symetrie), přičemž přímka p prochází počátkem a má směrový vektor $(3, 0, -1)$. Určete matici zobrazení φ ve standardní bázi.

3. (1 bod) Mějme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ a $\psi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ zadané předpisy

$$\varphi(p(x)) = (x^2 + 1) \cdot p(x) \quad \text{a} \quad \psi(q(x)) = q''(x),$$

pro $p(x) \in \mathbb{R}_1[x]$ a $q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$. Zde $q''(x)$ označuje druhou derivaci polynomu $q(x)$. Dále uvažme lineární zobrazení

$$f_1 := \psi \circ \varphi : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x] \quad \text{a} \quad f_2 := \varphi \circ \psi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x].$$

- a) Určete $f_1(ax + b)$ a $f_2(ax^3 + bx^2 + cx + d)$.
b) Určete matici zobrazení f_2 v bázi $\alpha = (x^3, x^2, x, 1)$ prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.
b) Určete vlastní čísla f_2 a najděte nějakou bázi $\mathbb{R}_3[x]$ složenou z vlastních vektorů f_2 .
4. (1 bod) Vysvětete, proč je vhodné determinant čtvercových matic typu n/n považovat za n -lineární antisymetrické zobrazení a jak to lze využít pro výpočet determinantu (tj. převodem na schodovitý tvar).
5. (1 bod) Definujte ortogonální zobrazení na prostoru V se skalárním součinem a ukažte, že je-li $U \subset V$ invariantní podprostor pro ortogonální zobrazení $\psi : V \rightarrow V$, pak je jeho ortogonální doplněk U^\perp také invariantní.

Řešení a bodování

1. a) [0.3 bodu] Označme řádky matice v_1 (první řádek), v_2 (druhý řádek) a v_3 (třetí řádek). Podmínka ortogonality znamená

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 1 + 2a = 0, \quad \langle v_1, v_3 \rangle = c + 6 = 0, \quad \langle v_2, v_3 \rangle = c + 3a + b = 0,$$

[0.1b za úvahu]. Tato soustava rovnic má řešení $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{15}{2}$ a $c = -6$, [0.2b].

- b) [0.5 bodu] Vektor w je vlastní, jestliže $Aw = \lambda w$, tj.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \\ c & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 2b \\ c + 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [0.1b],$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Tři složky poslední rovnosti jsou $\lambda = 1$, $1 + 2b = 0$ a $c + 2 = 2\lambda$. Tedy w je vlastní vektor pro vlastní číslo $\lambda = 1$, což znamená $b = -\frac{1}{2}$ a $c = 0$ (pro libovolné $a \in \mathbb{R}$), [0.2b]. Pro tyto hodnoty parametrů spočteme determinant

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & -1/2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = a - \frac{1}{2}, \quad [0.1b].$$

Tedy $a = \frac{1}{2}$, [0.1b].

- c) [0.2 bodu] Tato soustava rovnic má dvoudimenzionální prostor řešení právě, když má matice A hodnost jedna, tj. lze ji řádkovými elementárními úpravami převést na matici, kde jsou dva řádky nulové. Spočteme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \\ c & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a - 2 & b \\ 0 & 3 - 2c & 1 \end{pmatrix},$$

tedy druhý řádek je nulový pro volbu $a = 2$ a $b = 0$, nicméně třetí řádek je vždy nenulový. Parametry a, b, c tedy nelze zvolit tak, aby soustava měla dvoudimenzionální prostor řešení, [0.1b za úvahu a 0.1b za správně zdůvodněnou odpověď].

2. [1 bod] Označme $v_1 = (3, 0, -1)$ směrový vektor přímky p a dále zvolíme dva vektory kolmé k v_1 : např. $v_2 = (1, 0, 3)$ a $v_3 = (0, 1, 0)$, [0.2b za výběr vhodné báze]. V bázi $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ má zobrazení φ matici

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

[0.2b]. Použijeme vztah $(\varphi)_{\epsilon, \epsilon} = (id)_{\epsilon, \alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha, \alpha} \cdot (id)_{\alpha, \epsilon}$, [0.1b], kde pro matici $(id)_{\epsilon, \alpha}$ máme

$$(id)_{\epsilon, \alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

[0.1b]. Matice $(id)_{\alpha, \epsilon}$ se určí jako matice inverzní k matici $(id)_{\epsilon, \alpha}$, [0.1b za úvahu], tj.

$$(id)_{\alpha, \epsilon} = ((id)_{\epsilon, \alpha})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

[0.1b]. Celkem dostaneme

$$(\varphi)_{\epsilon, \epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

[0.2b].

3. a) [0.2 bodu] Platí

$$f_1(ax + b) = ((x^2 + 1)(ax + b))'' = (ax^3 + bx^2 + ax + b)'' = 6ax + 2b, \quad [0.1b]$$

$$f_2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (x^2 + 1)(6ax + 2b) = 6ax^3 + 2bx^2 + 6ax + 2b, \quad [0.1b].$$

b) [0.2 bodu] Máme $f_2(x^3) = 6x^3 + 6x$, $f_2(x^2) = 2x^2 + 2$, $f_2(x) = 0$ a $f_2(1) = 0$, tedy hledaná matice je

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [0.2b].$$

b) [0.6 bodu] Toto lze spočítat pomocí vlastních čísel a vektorů matice z části b), nicméně rychlejší pracovat přímo s předpisem $f_2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 6ax^3 + 2bx^2 + 6ax + 2b$. Zejména $f_2(x) = 0$ a $f_2(1) = 0$ znamená, že polynomy x a 1 jsou vlastní vektory příslušející vlastnímu číslu 0 , [0.2b]. Dále si všimneme, že $f_2(x^3 + x) = 6(x^3 + x)$ a $f_2(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1)$, tj. $x^3 + x$ je vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu 6 a $x^2 + 1$ je vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu 2 , [0.3b]. Tedy báze z vlastních vektorů je

$$\alpha = (1, x, x^2 + 1, x^3 + 1), \quad [0.1b].$$