Matematika I – 12
Afinní geometrie

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

2.–6.12. 2019

Obsah přednášky

1. Afinní prostory
2. Konvexní množiny
3. Afinní zobrazení

Plán přednášky

1. Afinní prostory
2. Konvexní množiny
3. Afinní zobrazení

Definition

Afinním prostorem $\mathcal{A}$ se zaměřením V rozumíme množinu **bodů** P, spolu se zobrazením $P \times V \to P$, $(A, v) \mapsto A + v$, splňující vlastnosti (1)–(3). Pro libovolný pevně zvolený vektor $v \in V$ je tak definována **translace** $\tau_v : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ jako zúžené zobrazení

$$\tau_v : P \simeq P \times \{v\} \to P, \quad A \mapsto A + v.$$

Dimenzí afinního prostoru $\mathcal{A}$ rozumíme dimenzi jeho zaměření.

Definition

Afinním prostorem $\mathcal{A}$ se zaměřením V rozumíme množinu **bodů** P, spolu se zobrazením $P \times V \to P$, $(A, v) \mapsto A + v$, splňující vlastnosti (1)–(3). Pro libovolný pevně zvolený vektor $v \in V$ je tak definována **translace** $\tau_v : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ jako zúžené zobrazení

$$\tau_v : P \simeq P \times \{v\} \to P, \quad A \mapsto A + v.$$

Dimenzí afinního prostoru $\mathcal{A}$ rozumíme dimenzi jeho zaměření.

Nadále nebudeme rozlišovat $\mathcal{A}$ a P v označení. Z axiomů okamžitě plyne pro libovolné body A, B, C v afinním prostoru $\mathcal{A}$

$$A - A = 0 \in V$$
$$B - A = -(A - B)$$
$$(B - A) + (C - B) = (C - A).$$

Volba jednoho pevného bodu $A_0 \in \mathcal{A}$ nám určuje bijekci mezi V a $\mathcal{A}$.

Volba jednoho pevného bodu $A_0 \in \mathcal{A}$ nám určuje bijekci mezi V a $\mathcal{A}$.
Při volbě pevné báze $\underline{u}$ ve V tak dostáváme pro každý bod $A \in \mathcal{A}$ jednoznačné vyjádření

$$A = A_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Afinní souřadnice

Hovoříme o **afinní soustavě souřadnic** $(A_0; u_1, \dots, u_n)$ zadané **počátkem afinní souřadné soustavy** A_0 a bazí zaměření $\underline{u}$.
Hovoříme také o **afinním repéru** $(A_0, \underline{u})$.

Volba jednoho pevného bodu $A_0 \in \mathcal{A}$ nám určuje bijekci mezi V a $\mathcal{A}$.
Při volbě pevné báze $\underline{u}$ ve V tak dostáváme pro každý bod $A \in \mathcal{A}$ jednoznačné vyjádření

$$A = A_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Afinní souřadnice

Hovoříme o **afinní soustavě souřadnic** $(A_0; u_1, \dots, u_n)$ zadané **počátkem afinní souřadné soustavy** A_0 a bazí zaměření $\underline{u}$.
Hovoříme také o **afinním repéru** $(A_0, \underline{u})$.
Afinní souřadnice bodu A v soustavě $(A_0, \underline{u})$ jsou souřadnicemi vektoru $A - A_0$ v bázi $\underline{u}$ zaměření V.

Volba jednoho pevného bodu $A_0 \in \mathcal{A}$ nám určuje bijekci mezi V a $\mathcal{A}$.
Při volbě pevné báze $\underline{u}$ ve V tak dostáváme pro každý bod $A \in \mathcal{A}$ jednoznačné vyjádření

$$A = A_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Afinní souřadnice

Hovoříme o **afinní soustavě souřadnic** $(A_0; u_1, \dots, u_n)$ zadané **počátkem afinní souřadné soustavy** A_0 a bazí zaměření $\underline{u}$.
Hovoříme také o **afinním repéru** $(A_0, \underline{u})$.
Afinní souřadnice bodu A v soustavě $(A_0, \underline{u})$ jsou souřadnicemi vektoru $A - A_0$ v bázi $\underline{u}$ zaměření V.

Volba afinního souřadného systému ztotožňuje n-rozměrný afinní prostor $\mathcal{A}$ se standardním afinním prostorem $\mathcal{A}_n$.

Definition (Afinní podprostory)

Neprázdná podmnožina $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ afinního prostoru $\mathcal{A}$ se zaměřením V se nazývá **afinní podprostor** v $\mathcal{A}$, je-li podmnožina $W = \{B - A; A, B \in \mathcal{Q}\} \subset V$ vektorovým podprostorem a pro libovolné $A \in \mathcal{Q}$, $v \in W$ je $A + v \in \mathcal{Q}$.

Definition (Afinní podprostory)

Neprázdná podmnožina $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ afinního prostoru $\mathcal{A}$ se zaměřením V se nazývá **afinní podprostor** v $\mathcal{A}$, je-li podmnožina $W = \{B - A; A, B \in \mathcal{Q}\} \subset V$ vektorovým podprostorem a pro libovolné $A \in \mathcal{Q}$, $v \in W$ je $A + v \in \mathcal{Q}$.

Skutečně je rozumné mít obě podmínky v definici, protože je snadné najít příklady podmnožin, které budou splňovat první, ale nikoliv druhou. (Např. přímka v rovině s vyjmutým jedním bodem.)

Plán přednášky

1 Afinní prostory

2 Konvexní množiny

3 Afinní zobrazení

Podmnožina M afinního prostoru se nazývá **konvexní**, jestliže s každými svými dvěma body A, B obsahuje i celou úsečku $\Delta(A, B)$.
Přímo z definice je vidět, že každá konvexní množina obsahuje s každými $k+1$ body v obecné poloze i celý jimi definovaný simplex.
Konvexními množinami jsou např.
(1) prázdná podmnožina
(2) afinní podprostory
(3) úsečky, polopřímky $p = \{P + t \cdot v;\ t \geq 0\}$, obecněji k–rozměrné poloprostory
$\alpha = \{P + t_1 \cdot v_1 + \cdots + t_k \cdot v_k;\ t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}, t_k \geq 0\}$, úhly v dvojrozměrných podprostorech
$\beta = \{P + t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2;\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0\}$, atd.
Přímo z definice také plyne, že průnik libovolného systému konvexních množin je opět konvexní. Průnik všech konvexních množin obsahujících danou množinu M nazýváme **konvexní obal** $\mathcal{K}(M)$ množiny M.

Theorem

Konvexní obal libovolné podmnožiny $M \subset \mathcal{A}$ je

$$\mathcal{K}(M) = \{t_1 A_1 + \dots + t_s A_s;\ \sum_{i=1}^{s} t_i = 1,\ t_i \geq 0\}$$

Konvexní obaly konečných množin bodů se nazývají **konvexní mnohostěny**. Jsou-li definující body $A_0, \dots, A_k$ konvexního mnohostěnu v obecné poloze, dostáváme právě k-rozměrný **simplex**. V případě simplexu je vyjádření jeho bodů ve tvaru afinní kombinace definujících vrcholů jednoznačné.

V problému lineárního programování je množina přípustných hodnot vždy konvexní.
Lineární formy nabývají maxima či minima na konvexní množině vždy na hranici v některém z vrcholů z příslušného konvexního mnohočlenu.

Plán přednášky

1 Afinní prostory
2 Konvexní množiny
3 Afinní zobrazení

Zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je afinní, právě když existuje lineární zobrazení φ mezi zaměřeními takové, že

$$f(x+v) = f(x) + \varphi(v)$$

Zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je afinní, právě když existuje lineární zobrazení φ mezi zaměřeními takové, že

$$f(x+v) = f(x) + \varphi(v)$$

Zobrazení f je afinní, právě když zachovává afinní kombinace bodů.

Afinní kombinace dvojice bodů můžeme také dobře vyjádřit pomocí tzv. **poměru bodů** na přímce. Jeli bod C afinní kombinací bodů A a $B \neq C$, $C = rA + sB$, pak řekneme že číslo

$$\lambda = (C; A, B) = -\frac{s}{r}$$

je poměrem bodu C vzhledem k daným bodům A a B. Protože bod C můžeme vyjádřit jako

$$C = A + s(B - A) = B + r(A - B),$$

je poměr λ ve skutečnosti poměrem velikostí orientovaných vektorů $C - A$ a $C - B$. Zejména je $\lambda = -1$ právě, když je C středem úsečky dané body A a B (tj. v naší afinní kombinaci bude $r = s = \frac{1}{2}$).

Naše charakterizace afinních zobrazení prostřednictvím afinních kombinací tedy má velice srozumitelně znějící důsledek:

Theorem

Afinní zobrazení jsou právě ta zobrazení, která zachovávají poměry.

Změny souřadnic

Volbou afinních souřadnic $(A_0, \underline{u})$ na $\mathcal{A}$ a $(B_0, \underline{v})$ na $\mathcal{B}$ dostáváme souřadné vyjádření afinního zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Přímo z definice je zřejmé, že stačí vyjádřit obraz $f(A_0)$ počátku souřadnic v $\mathcal{A}$ v souřadnicích na $\mathcal{B}$, tj. vyjádřit vektor $f(A_0) - B_0$ v bázi $\underline{v}$ jako sloupec souřadnic y_0 a vše ostatní je pak určeno násobením maticí zobrazení φ ve zvolených bazích a přičtením výsledku. Každé afinní zobrazení tedy v souřadnicích vypadá takto:

$$x \mapsto y_0 + Y \cdot x,$$

kde y_0 je jako výše a Y je matice zobrazení φ.

Transformace afinních souřadnic odpovídá vyjádření identického zobrazení ve zvolených afinních repérech. Změna souřadného vyjádření afinního zobrazení v důsledku změny bazí se snadno spočte pomocí násobení a sčítání matic a vektorů: při změně báze na definičním oboru daném posunutím w a maticí M, přičemž staré souřadnice pomocí nových jsou

$$x = w + M \cdot x',$$

a změně na oboru hodnot s posunutím z a maticí N, přičemž nové souřadnice jsou pomocí starých

$$y' = z + N \cdot y,$$

dostáváme pro zobrazení dané v původních bazích vektorem posunutí y_0 a maticí Y přímým výpočtem

$$\begin{aligned} y' &= z + N \cdot y = z + N \cdot (y_0 + Y \cdot x) \\ &= (z + N \cdot y_0 + N \cdot Y \cdot w) + (N \cdot Y \cdot M) \cdot x'. \end{aligned}$$

Je tedy afinní zobrazení v nových bazích dáno vektorem posunutí $z + N \cdot y_0 + N \cdot Y \cdot w$ a maticí $N \cdot Y \cdot M$.