Drsná matematika I – 13
Euklidovská geometrie a kvadratické formy

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

9.–13. 12. 2019

Obsah přednášky

Plán přednášky

Kde je dobré číst?

- vlastní poznámky, texty současného nebo předcházejícího přednášejícího, GOOGLE, atd.

Kde je dobré číst?

- vlastní poznámky, texty současného nebo předcházejícího přednášejícího, GOOGLE, atd.
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta.
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/~lmotm275/skripta/).
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.
- František Šik, Lineární algebra zaměřená na numerickou analýzu, MU, 1998, 176 s. ISBN 80-210-1996-2.

Plán přednášky

Již jsme se vzdálenostmi pracovali s pomocí skalárních součinů ve vektorových prostorech. V analytické geometrii lze takto:

Již jsme se vzdálenostmi pracovali s pomocí skalárních součinů ve vektorových prostorech. V analytické geometrii lze takto:

Definition

Standardní **bodový euklidovský prostor** $\mathcal{E}_n$ je afinní prostor $\mathcal{A}_n$, jehož zaměřením je standardní euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem

$$\langle x, z\rangle = x^T \cdot y.$$

Kartézská souřadná soustava je afinní souřadná soustava $(A_0; \underline{u})$ s ortonormální bazí $\underline{u}$. **Vzdálenost bodů** $A, B \in \mathcal{E}_n$ definujeme jako velikost vektoru $\|B - A\|$, budeme ji značit $\rho(A, B)$.

Již jsme se vzdálenostmi pracovali s pomocí skalárních součinů ve vektorových prostorech. V analytické geometrii lze takto:

Definition

Standardní **bodový euklidovský prostor** $\mathcal{E}_n$ je afinní prostor $\mathcal{A}_n$, jehož zaměřením je standardní euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem

$$\langle x, z \rangle = x^T \cdot y.$$

Kartézská souřadná soustava je afinní souřadná soustava $(A_0; \underline{u})$ s ortonormální bazí $\underline{u}$. **Vzdálenost bodů** $A, B \in \mathcal{E}_n$ definujeme jako velikost vektoru $\|B - A\|$, budeme ji značit $\rho(A, B)$. **Euklidovské podprostory** v $\mathcal{E}_n$ jsou afinní podprostory jejichž zaměření uvažujeme spolu se zúženými skalárními součiny.

Již jsme se vzdálenostmi pracovali s pomocí skalárních součinů ve vektorových prostorech. V analytické geometrii lze takto:

Definition

Standardní **bodový euklidovský prostor** $\mathcal{E}_n$ je afinní prostor $\mathcal{A}_n$, jehož zaměřením je standardní euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem

$$\langle x, z\rangle = x^T \cdot y.$$

Kartézská souřadná soustava je afinní souřadná soustava $(A_0; \underline{u})$ s ortonormální bazí $\underline{u}$. **Vzdálenost bodů** $A, B \in \mathcal{E}_n$ definujeme jako velikost vektoru $\|B - A\|$, budeme ji značit $\rho(A, B)$.
Euklidovské podprostory v $\mathcal{E}_n$ jsou afinní podprostory jejichž zaměření uvažujeme spolu se zúženými skalárními součiny.
Bodovým euklidovským prostorem $\mathcal{E}$ rozumíme afinní prostor, jehož zaměření je euklidovský vektorový prostor. Pojem kartézské souřadné soustavy má opět jasný smysl. Každá volba takové souřadné soustavy ovšem zadává ztotožnění $\mathcal{E}$ se standardním prostorem $\mathcal{E}_n$.

Theorem (jednoduché vlastnosti skalárních součinů)

Pro každé vektory u a v, které leží v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem, platí

1. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(**trojúhelníková nerovnost**). Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
2. $|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$ *(**Cauchyova nerovnost**). Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
3. *pro každý ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ platí* $\|u\|^2 \geq |u \cdot e_1|^2 + \cdots + |u \cdot e_k|^2$ *(**Besselova nerovnost**).*
4. *Pro ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ je* $u \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ *právě když* $\|u\|^2 = |u \cdot e_1|^2 + \cdots + |u \cdot e_k|^2$ *(**Parsevalova rovnost**).*
5. *Pro ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ a $u \in V$ je vektor $w = (u \cdot e_1)e_1 + \cdots + (u \cdot e_k)e_k$ jediným vektorem, který minimalizuje velikost $\|u - v\|$ pro všechny $v \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$.*

Všechny důkazy spočívají v přímých výpočtech:

Theorem (jednoduché důsledky pro euklidovskou geometrii)

Pro body $A, B, C \in \mathcal{E}_n$ *platí*

1. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$
2. $\rho(A, B) = 0$ *právě, když* $A = B$
3. $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$
4. *V každé kartézké souřadné soustavě* $(A_0; \underline{e})$ *mají body*

   $$A = A_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, \quad B = A_0 + b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$$

   vzdálenost $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$.
5. *Pro podprostory* $\mathcal{R}$ *a* $\mathcal{Q}$ *v* $\mathcal{E}_n$ *existují bod* $P \in \mathcal{Q}$ *a* $Q \in \mathcal{R}$ *minimalizující vzdálenosti bodů* $B \in \mathcal{Q}$ *a* $A \in \mathcal{R}$. *Vzdálenost bodů* Q *a* P *je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru* $A - B$ *do* $Z(\mathcal{Q})^{\perp}$ *pro libovolné body* $B \in \mathcal{Q}$ *a* $A \in \mathcal{R}$.

Důkazy tvrzení

První tři vlastnosti vyplývají přímo z vlastností velikosti vektorů v prostorech se skalárním součinem, čtvrtá plyne přímo z vyjádření skalárního součinu v libovolné ortonormální bázi.

Důkazy tvrzení

První tři vlastnosti vyplývají přímo z vlastností velikosti vektorů v prostorech se skalárním součinem, čtvrtá plyne přímo z vyjádření skalárního součinu v libovolné ortonormální bázi.
Speciálním případem posledního bodu je tvrzení:

Je–li dán bod A a podprostor $\mathcal{Q}$ v $\mathcal{E}_n$, pak existuje bod $P \in \mathcal{Q}$ minimalizující vzdálenosti bodů $\mathcal{Q}$ od A. Vzdálenost bodů A a P je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $A - B$ do $Z(\mathcal{Q})^{\perp}$ pro libovolný $B \in \mathcal{Q}$.

Důkazy tvrzení

První tři vlastnosti vyplývají přímo z vlastností velikosti vektorů v prostorech se skalárním součinem, čtvrtá plyne přímo z vyjádření skalárního součinu v libovolné ortonormální bázi.
Speciálním případem posledního bodu je tvrzení:

Je–li dán bod A a podprostor $\mathcal{Q}$ v $\mathcal{E}_n$, pak existuje bod $P \in \mathcal{Q}$ minimalizující vzdálenosti bodů $\mathcal{Q}$ od A. Vzdálenost bodů A a P je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $A - B$ do $Z(\mathcal{Q})^\perp$ pro libovolný $B \in \mathcal{Q}$.

Vektor $A - B$ se jednoznačně rozkládá na $A - B = u_1 + u_2$, $u_1 \in Z(\mathcal{Q})$, $u_2 \in Z(\mathcal{Q})^\perp$. Přitom u_2 nezávisí na volbě $B \in \mathcal{Q}$, $P = A + (-u_2) = B + u_1 \in \mathcal{Q}$ a $\|A - B\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 \geq \|u_2\|^2 = \|A - P\|$. Odtud již vyplývá, že minima je skutečně dosaženo, a to pro bod P. Vypočtená vzdálenost je skutečně $\|u_2\|$.
Obecný výsledek se dokáže zcela obdobně.

Příklad – vzdálenost přímek

Určete vzdálenost přímek v $\mathbb{R}^3$.

$$p: [1,-1,0] + t(-1,2,3), \quad \text{a} \quad q: [2,5,-1] + t(-1,-2,1).$$

Příklad – vzdálenost přímek

Určete vzdálenost přímek v $\mathbb{R}^3$.

$$p: [1,-1,0] + t(-1,2,3), \quad \text{a} \quad q: [2,5,-1] + t(-1,-2,1).$$

Vzdálenost je dána jako velikost kolmého průmětu libovolné příčky (spojnice) daných přímek do ortogonálního doplňku vektorového podprostoru generovaného jejich zaměřeními. Tento ortogonální doplněk je: $\langle(-1,2,3),(-1,-2,1)\rangle^{\perp} = \langle(8,-2,4)\rangle = \langle(4,-1,2)\rangle$.

Příklad – vzdálenost přímek

Určete vzdálenost přímek v $\mathbb{R}^3$.

$$p: \ [1,-1,0]+t(-1,2,3), \quad \text{a} \quad q: \ [2,5,-1]+t(-1,-2,1).$$

Vzdálenost je dána jako velikost kolmého průmětu libovolné příčky (spojnice) daných přímek do ortogonálního doplňku vektorového podprostoru generovaného jejich zaměřeními. Tento ortogonální doplněk je: $\langle(-1,2,3),(-1,-2,1)\rangle^{\perp}=\langle(8,-2,4)\rangle=\langle(4,-1,2)\rangle$. Spojnicí daných přímek je například úsečka $[1,-1,0][2,5,-1]$, promítneme tedy vektor $[1,-1,0]-[2,5,-1]=(-1,-6,1)$. Pro vzdálenost přímek pak dostáváme:

$$\rho(p,q)=\frac{|(-1,-6,1)\cdot(4,-1,2)|}{\|(4,-1,2)\|}=\frac{4}{\sqrt{21}}.$$

Plán přednášky

Stejně jako vzdálenost, i řada dalších geometrických pojmů jako odchylky, orientace, objem apod. je v bodových prostorech $\mathcal{E}_n$ zaváděna prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech.

Stejně jako vzdálenost, i řada dalších geometrických pojmů jako odchylky, orientace, objem apod. je v bodových prostorech $\mathcal{E}_n$ zaváděna prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech.

Z Cauchyovy nerovnosti plyne $0 \le \frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|} \le 1$, má proto smysl:

Definition

Odchylka $\varphi(u, v)$ **vektorů** $u, v \in V$ v reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem je dána vztahem

$$\cos \varphi(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}, \quad 0 \le \varphi(u, v) \le 2\pi.$$

Stejně jako vzdálenost, i řada dalších geometrických pojmů jako odchylky, orientace, objem apod. je v bodových prostorech $\mathcal{E}_n$ zaváděna prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech.
Z Cauchyovy nerovnosti plyne $0 \leq \frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|} \leq 1$, má proto smysl:

Definition

Odchylka $\varphi(u, v)$ **vektorů** $u, v \in V$ v reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem je dána vztahem

$$\cos \varphi(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}, \quad 0 \leq \varphi(u, v) \leq 2\pi.$$

V rovině $\mathbb{R}^2$ pro odchylku vektorů na jednotkové kružnici $u = (1, 0)$, $v = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ skutečně platí $\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$.

Stejně jako vzdálenost, i řada dalších geometrických pojmů jako odchylky, orientace, objem apod. je v bodových prostorech $\mathcal{E}_n$ zaváděna prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech.

Z Cauchyovy nerovnosti plyne $0 \leq \frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|} \leq 1$, má proto smysl:

Definition

Odchylka $\varphi(u, v)$ **vektorů** $u, v \in V$ v reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem je dána vztahem

$$\cos \varphi(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}, \quad 0 \leq \varphi(u, v) \leq 2\pi.$$

V rovině $\mathbb{R}^2$ pro odchylku vektorů na jednotkové kružnici $u = (1, 0)$, $v = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ skutečně platí $\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$. Odchylka je nezávislá na velikostech a vhodnou rotací dosáhneme toho, že jeden z dvojice vektorů má tvar $(x_1, 0)$.

Stejně jako vzdálenost, i řada dalších geometrických pojmů jako odchylky, orientace, objem apod. je v bodových prostorech $\mathcal{E}_n$ zaváděna prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech.
Z Cauchyovy nerovnosti plyne $0 \leq \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|} \leq 1$, má proto smysl:

Definition

Odchylka $\varphi(u, v)$ **vektorů** $u, v \in V$ v reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem je dána vztahem

$$\cos \varphi(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}, \quad 0 \leq \varphi(u, v) \leq 2\pi.$$

V rovině $\mathbb{R}^2$ pro odchylku vektorů na jednotkové kružnici $u = (1, 0)$, $v = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ skutečně platí $\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$.
Odchylka je nezávislá na velikostech a vhodnou rotací dosáhneme toho, že jeden z dvojice vektorů má tvar $(x_1, 0)$.Ve vícerozměrných prostorech je odchylka dvou vektorů vždy měřena v rovině, kterou tyto vektory generují (nebo je nula).

V libovolném reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem přímo z definic plyne

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2-2(u\cdot v) = \|u\|^2+\|v\|^2-2\|u\|\|v\|\cos\varphi(u,v).$$

To je tzv. **kosinová věta**.

V libovolném reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem přímo z definic plyne

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2-2(u\cdot v) = \|u\|^2+\|v\|^2-2\|u\|\|v\|\cos\varphi(u,v).$$

To je tzv. **kosinová věta**.
Dále platí pro každou ortonormální bázi $\underline{e}$ a $u \in V$ vztah $\|u\|^2 = \sum_i |u \cdot e_i|^2$, tj.

$$1 = \sum_i (\cos\varphi(u,e_i))^2,$$

což je obvyklé tvrzení o směrových kosinech $\varphi(u,e_i)$ vektoru u.
Z definice odchylek vektorů nyní můžeme dovodit rozumné definice pro obecné podprostory v každém euklidovském vektorovém prostoru.

Definition

Nechť U_1, U_2 jsou podprostory v euklidovském prostoru V.
Odchylka podprostorů U_1, U_2 je reálné číslo $\alpha = \varphi(U_1, U_2) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ splňující:

(1) Je-li $\dim U_1 = \dim U_2 = 1$, $U_1 = \langle u \rangle$, $U_2 = \langle v \rangle$, pak

$$\cos \alpha = \frac{|u.v|}{\|u\|\|v\|}.$$

(2) Jsou-li dimenze U_1, U_2 kladné a $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, pak je odchylka minimem všech odchylek jednorozměrných podprostorů

$$\alpha = \min\{\varphi(\langle u \rangle, \langle v \rangle); 0 \neq u \in U_1, 0 \neq v \in U_2\}.$$

Ukážeme v zápětí, že takové minimum skutečně vždy existuje.

Definition (pokračování)

(3) Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

(4) Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}).$$

Definition (pokračování)

(3) Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

(4) Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp).$$

Odchylka podprostorů $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1)$, $Z(\mathcal{Q}_2)$.

Definition (pokračování)

(3) Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

(4) Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp).$$

Odchylka podprostorů $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1)$, $Z(\mathcal{Q}_2)$.

Všimněme si, že odchylka je vždy dobře definována, zejména v posledním případě je

$$(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp) \cap (U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp) = \{0\}$$

můžeme tedy opravdu odchylku určit podle bodu (2).

Lemma

Nechť v je vektor v euklidovském prostoru V a $U \subset V$ libovolný podprostor. Označme $v_1 \in U$, $v_2 \in U^\perp$ (jednoznačně určené) komponenty vektoru v, tj. $v = v_1 + v_2$. Pak pro odchylku φ podprostoru generovaného v od U platí

$$\cos\varphi(\langle v\rangle, U) = \cos\varphi(\langle v\rangle, \langle v_1\rangle) = \frac{\|v_1\|}{\|v\|}.$$

Lemma

Nechť v je vektor v euklidovském prostoru V a $U \subset V$ libovolný podprostor. Označme $v_1 \in U$, $v_2 \in U^\perp$ (jednoznačně určené) komponenty vektoru v, tj. $v = v_1 + v_2$. Pak pro odchylku φ podprostoru generovaného v od U platí

$$\cos\varphi(\langle v\rangle, U) = \cos\varphi(\langle v\rangle, \langle v_1\rangle) = \frac{\|v_1\|}{\|v\|}.$$

Výpočet odchylek v obecných dimenzích je snadno spočitatelný pomocí výpočtu zkracování vlastních vektorů při dvou kolmých projekcí mezi prostory, viz texty k přednáškám.

Plán přednášky

1. Najděte vzdálenost bodu $A \in \mathcal{E}_n$ od podprostoru $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$.

1. Najděte vzdálenost bodu $A \in \mathcal{E}_n$ od podprostoru $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$.
2. V $\mathcal{E}_2$ veďte bodem A přímku q svírající s danou přímkou p daný úhel

Najdeme vektor $u \in \mathbb{R}^2$ ležící v zaměření přímky q a zvolíme vektor v mající od u zadanou odchylku. Hledaná přímka je dána bodem A a zaměřením $\langle v \rangle$. Úloha má dvě nebo jedno řešení.

1. Najděte vzdálenost bodu $A \in \mathcal{E}_n$ od podprostoru $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$.
2. V $\mathcal{E}_2$ veďte bodem A přímku q svírající s danou přímkou p daný úhel
Najdeme vektor $u \in \mathbb{R}^2$ ležící v zaměření přímky q a zvolíme vektor v mající od u zadanou odchylku. Hledaná přímka je dána bodem A a zaměřením $\langle v \rangle$. Úloha má dvě nebo jedno řešení.
3. Spočtěte patu kolmice vedené bodem na danou přímku.

1. Najděte vzdálenost bodu $A \in \mathcal{E}_n$ od podprostoru $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$.
2. V $\mathcal{E}_2$ veďte bodem A přímku q svírající s danou přímkou p daný úhel
Najdeme vektor $u \in \mathbb{R}^2$ ležící v zaměření přímky q a zvolíme vektor v mající od u zadanou odchylku. Hledaná přímka je dána bodem A a zaměřením $\langle v \rangle$. Úloha má dvě nebo jedno řešení.
3. Spočtěte patu kolmice vedené bodem na danou přímku.
4. V $\mathcal{E}_3$ určete vzdálenost dvou přímek p, q.
Zvolíme libovolně jeden bod z každé přímky, $A \in p$, $B \in q$. Komponenta vektoru $A - B$ v ortogonálním doplňku $(Z(p) + Z(q))^\perp$ má velikost rovnu vzdálenosti p a q.

1. Najděte vzdálenost bodu $A \in \mathcal{E}_n$ od podprostoru $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$.
2. V $\mathcal{E}_2$ veďte bodem A přímku q svírající s danou přímkou p daný úhel
Najdeme vektor $u \in \mathbb{R}^2$ ležící v zaměření přímky q a zvolíme vektor v mající od u zadanou odchylku. Hledaná přímka je dána bodem A a zaměřením $\langle v \rangle$. Úloha má dvě nebo jedno řešení.
3. Spočtěte patu kolmice vedené bodem na danou přímku.
4. V $\mathcal{E}_3$ určete vzdálenost dvou přímek p, q.
Zvolíme libovolně jeden bod z každé přímky, $A \in p$, $B \in q$. Komponenta vektoru $A - B$ v ortogonálním doplňku $(Z(p) + Z(q))^\perp$ má velikost rovnu vzdálenosti p a q.
5. V $\mathcal{E}_3$ najděte osu dvou mimoběžek p a q:
Nechť η je rovina generovaná jedním bodem $A \in p$ a součtem $Z(p) + (Z(p) + Z(q))^\perp$. Pak průnik $\eta \cap q$ spolu se zaměřením $(Z(p) + Z(q))^\perp$ dávají parametrický popis hledané osy. (Prověřte, kolik má úloha obecně řešení!)

Orientovaný (bodový) euklidovský prostor je euklidovský bodový prostor, jehož zaměření je orientované. V dalším budeme uvažovat standardní $\mathcal{E}_n$ spolu s orientací zadanou standardní bazí $\mathcal{R}^n$.

Orientovaný (bodový) euklidovský prostor je euklidovský bodový prostor, jehož zaměření je orientované. V dalším budeme uvažovat standardní $\mathcal{E}_n$ spolu s orientací zadanou standardní bazí $\mathcal{R}^n$. Nechť $u_1, \dots, u_k$, jsou libovolné vektory v zaměření $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{E}_n$ je libovolný bod. Rovnoběžnostěn $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{E}_n$ je množina

$$\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \{A + c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k; 0 \le c_i \le 1, i = 1, \dots, k\}.$$

Jsou-li vektory $u_1, \dots, u_k$ nezávislé, jde o k–rozměrný rovnoběžnostěn $\mathcal{P}_k(A; u_1 \dots, u_k) \subset \mathcal{E}_n$. Pro dané vektory $u_1, \dots, u_k$ máme k dispozici také rovnoběžnostěny menších dimenzí

$$\mathcal{P}_1(A; u_1), \dots, \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k)$$

v euklidovských podprostorech $A + \langle u_1 \rangle, \dots, A + \langle u_1, \dots, u_k \rangle$.

Jsou-li $u_1, \dots, u_k$ lineárně závislé definujeme objem $\operatorname{Vol} P_k = 0$. Pro nezávislé vektory pak platí
$\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle \oplus (\langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle^{\perp} \cap \langle u_1, \dots, u_k \rangle)$.
Navíc v tomto rozkladu se u_k jednoznačně vyjádří jako

$$u_k = u_k' + e_k, \text{ kde } e_k \perp \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle.$$

Absolutní hodnotu objemu definujeme induktivně:

$$|\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_1(A; u_1) = \|u_1\|$$
$$|\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \|e_k\| |\operatorname{Vol}|\mathcal{P}(A; u_1, \dots, u_{k-1}).$$

Jsou-li $u_1, \dots, u_k$ lineárně závislé definujeme objem $\operatorname{Vol} P_k = 0$. Pro nezávislé vektory pak platí
$\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle \oplus (\langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle^\perp \cap \langle u_1, \dots, u_k \rangle)$.
Navíc v tomto rozkladu se u_k jednoznačně vyjádří jako

$$u_k = u_k' + e_k, \text{ kde } e_k \perp \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle.$$

Absolutní hodnotu objemu definujeme induktivně:

$$|\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_1(A; u_1) = \|u_1\|$$
$$|\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \|e_k\| |\operatorname{Vol}|\mathcal{P}(A; u_1, \dots, u_{k-1}).$$

Je-li $u_1, \dots, u_n$ báze kompatibilní s orientací V, definujeme (orientovaný) objem rovnoběžnostěnu
$\operatorname{Vol} \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n) = |\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n)$, v opačném případě klademe $\operatorname{Vol} \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n) = -|\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n)$.

Theorem

Nechť $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$ je euklidovský podprostor a nechť $(e_1, \dots, e_k)$ je jeho ortonormální báze. Pak pro libovolné vektory $u_1, \dots, u_k \in Z(\mathcal{Q})$ a $A \in \mathcal{Q}$ platí

1. $$\operatorname{Vol} \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot e_1 & \dots & u_k \cdot e_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot e_k & \dots & u_k \cdot e_k \end{pmatrix}$$
2. $$(\operatorname{Vol} \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k))^2 = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_k \cdot u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot u_k & \dots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix}$$

Determinant

$$\det\begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_k \cdot u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot u_k & \dots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix}$$

se nazývá **Grammův determinant** k–tice vektorů $u_1, \dots, u_k$. V geometrické formulaci dostáváme jako velice důžitý důsledek následující tvrzení:

Corollary

Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ euklidovského vektorového prostoru V je $\det \varphi$ roven (orientovanému) objemu obrazu rovnoběžnostěnu určeného vektory ortonormální báze. Obecněji, obraz rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}$ určeného libovolnými $\dim V$ vektory má objem roven $\det \varphi$–násobku původního objemu.

Determinant

$$\det\begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_k \cdot u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot u_k & \dots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix}$$

se nazývá **Grammův determinant** k–tice vektorů $u_1, \dots, u_k$. V geometrické formulaci dostáváme jako velice důžitý důsledek následující tvrzení:

Corollary

Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ euklidovského vektorového prostoru V je $\det \varphi$ roven (orientovanému) objemu obrazu rovnoběžnostěnu určeného vektory ortonormální báze. Obecněji, obraz rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}$ určeného libovolnými $\dim V$ vektory má objem roven $\det \varphi$–násobku původního objemu.

S determinantem a objemem rovnoběžnostěnů také úzce souvisí operace vektorového součinu a vnějšího součinu. Odkazujeme zde na texty.

Plán přednášky

Objekty v $\mathcal{E}_n$ lze zadávat i složitějšími rovnicemi než lineárními. Ty zadané kvadratickými rovnicemi, se jmenují **kvadriky**.

Objekty v $\mathcal{E}_n$ lze zadávat i složitějšími rovnicemi než lineárními. Ty zadané kvadratickými rovnicemi, se jmenují **kvadriky**.
Zvolme v $\mathcal{E}_n$ pevně kartézskou souřadnou soustavu (tj. bod a ortonormální bázi zaměření) a uvažme obecnou kvadratickou rovnici pro souřadnice $(x_1, \dots, x_n)$ bodů $A \in \mathcal{E}_n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} 2a_i x_i + a = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Můžeme ji zapsat jako $f(u) + g(u) + a = 0$ pro kvadratickou formu f (tj. zúžení symetrické bilineární formy F na dvojice stejných argumentů), lineární formu g a skalár $a \in \mathbb{R}$ a předpokládáme že hodnost f je nenulová (jinak by se jednalo o lineární rovnici popisující euklidovský podprostor).

Začněme s kvadratickou částí, tj. bilineární symetrickou formou $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Stejně dobře můžeme přemýšlet o obecné symetrické bilineární formě na libovolném vektorovém prostoru. Pro libovolnou bázi na tomto vektorovém prostoru bude hodnota $f(x)$ na vektoru $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ dána vztahem

$$f(x) = F(x, x) = \sum_{i,j} x_i x_j F(e_i, e_j) = x^T \cdot A \cdot x$$

kde $A = (a_{ij})$ je symetrická matice s prvky $a_{ij} = F(e_i, e_j)$.

Začněme s kvadratickou částí, tj. bilineární symetrickou formou $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Stejně dobře můžeme přemýšlet o obecné symetrické bilineární formě na libovolném vektorovém prostoru. Pro libovolnou bázi na tomto vektorovém prostoru bude hodnota $f(x)$ na vektoru $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ dána vztahem

$$f(x) = F(x, x) = \sum_{i,j} x_i x_j F(e_i, e_j) = x^T \cdot A \cdot x$$

kde $A = (a_{ij})$ je symetrická matice s prvky $a_{ij} = F(e_i, e_j)$. Takovýmto zobrazením f říkáme **kvadratické formy** a výše uvedená formula pro hodnotu formy s použitím zvolených souřadnic se nazývá **analytický tvar** formy. Jestliže změníme bázi e_i na jinou bázi $e'_1, \dots, e'_n$, dostaneme pro stejný vektor jiné souřadnice $x = S \cdot x'$ a tedy

$$f(x) = (S \cdot x')^T \cdot A \cdot (S \cdot x') = (x')^T \cdot (S^T \cdot A \cdot S) \cdot x'.$$

Předchozí výpočet na prostoru se skalárním součinem můžeme shrnout: *matice bilineární formy F a tedy i kvadratické formy f se transformuje při změně souřadnic způsobem, který pro ortogonální změny souřadnic splývá s transformací matic zobrazení (skutečně, pak je $S^{-1} = S^T$)*:

Theorem

Nechť V je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Pak vztah

$$\varphi \mapsto F, \quad F(u,u) = \langle \varphi(u), u \rangle$$

zadává bijekci mezi symetrickými lineárními zobrazeními a kvadratickými formami na V.

Euklidovská klasifikace kvadrik

Z poslední věty vyplývá okamžitý důsledek, že pro každou kvadratickou formu f existuje ortonormální báze zaměření, ve které má f diagonální matici (a diagonální hodnoty jsou jednoznačně určeny až na pořadí). Předpokládejme tedy přímo rovnici ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b = 0.$$

Euklidovská klasifikace kvadrik

Z poslední věty vyplývá okamžitý důsledek, že pro každou kvadratickou formu f existuje ortonormální báze zaměření, ve které má f diagonální matici (a diagonální hodnoty jsou jednoznačně určeny až na pořadí). Předpokládejme tedy přímo rovnici ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b = 0.$$

V dalším kroku pro souřadnice x_i s $\lambda_i \neq 0$ provedeme doplnění do čtverců, které „pohltí“ kvadráty i lineární členy týchž neznámých (tzv. Lagrangeův algoritmus). Tak nám zůstanou nejvýše ty neznámé, pro které byl jejich koeficient u kvadrátu nulový, a získáme tvar

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - p_i)^2 + \sum_{j \text{ splňující } \lambda_j = 0} b_j x_j + c = 0.$$

Pokud nám opravdu zůstaly nějaké lineární členy, můžeme zvolit novou bázi zaměření tak, aby odpovídající lineární forma byla prvkem duální báze a novou volbou počátku v $\mathcal{E}_n$ pak dosáhneme výsledného tvaru

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i^2 + b y_{k+1} + c = 0,$$

kde k je hodnost kvadratické formy f. Lineární člen se může (ale nemusí) objevit jen, pokud je hodnost f menší než n, $c \in \mathbb{R}$ může být nenulové pouze když je $b = 0$.

Případ $\mathcal{E}_2$, tj. kuželosečky v rovině

Původní rovnice má tvar

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_1x + a_2y + a = 0.$$

Případ $\mathcal{E}_2$, tj. kuželosečky v rovině

Původní rovnice má tvar

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_1x + a_2y + a = 0.$$

Volbou vhodné báze zaměření a následným doplněním čtverců dosáhneme tvaru (opět používáme stejného značení x, y pro nové souřadnice):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$$

kde a_i může být nenulové pouze v případě, že a_{ii} je nulové.

Případ $\mathcal{E}_2$, tj. kuželosečky v rovině – pokračování

Posledním krokem obecného postupu, tj. v dimenzi $n = 2$ jen případnou volbou posunutí, dosáhneme právě jedné z rovnic:

$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2 + 1$	prázdná množina
$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1$	elipsa
$0 = x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1$	hyperbola
$0 = x^2/a^2 - 2py$	parabola
$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2$	bod
$0 = x^2/a^2 - y^2/b^2$	2 různoběžné přímky
$0 = x^2 - a^2$	2 rovnoběžné přímky
$0 = x^2$	2 splývající přímky
$0 = x^2 + a^2$	prázdná množina

Afinní pohled

Geometrická formulace našeho popisu kvadrik je, že pro dva různé objekty – kvadriky, zadané v obecně různých kartézských souřadnicích, existuje **euklidovská transformace** na $\mathcal{E}_n$ (tj. afinní bijektivní zobrazení zachovávající velikosti) tehdy a jen tehdy, pokud výše uvedený algoritmus vede na stejný analytický tvar, až na pořadí souřadnic.

Afinní pohled

Geometrická formulace našeho popisu kvadrik je, že pro dva různé objekty – kvadriky, zadané v obecně různých kartézských souřadnicích, existuje **euklidovská transformace** na $\mathcal{E}_n$ (tj. afinní bijektivní zobrazení zachovávající velikosti) tehdy a jen tehdy, pokud výše uvedený algoritmus vede na stejný analytický tvar, až na pořadí souřadnic.

Pochopitelně se můžeme ptát, do jaké míry umíme podobnou věc v afinních prostorech, tj. s volností výběru jakékoliv afinní souřadné soustavy. Např. v rovině to bude znamenat, že neumíme rozlišit kružnici od elipsy, samozřejmě bychom ale měli odlišit hyperbolu a všechny ostatní typy kuželoseček. Hlavně ale splynou mezi sebou všechny hyperboly atd.

Afinní pohled

Geometrická formulace našeho popisu kvadrik je, že pro dva různé objekty – kvadriky, zadané v obecně různých kartézských souřadnicích, existuje **euklidovská transformace** na $\mathcal{E}_n$ (tj. afinní bijektivní zobrazení zachovávající velikosti) tehdy a jen tehdy, pokud výše uvedený algoritmus vede na stejný analytický tvar, až na pořadí souřadnic.
Pochopitelně se můžeme ptát, do jaké míry umíme podobnou věc v afinních prostorech, tj. s volností výběru jakékoliv afinní souřadné soustavy. Např. v rovině to bude znamenat, že neumíme rozlišit kružnici od elipsy, samozřejmě bychom ale měli odlišit hyperbolu a všechny ostatní typy kuželoseček. Hlavně ale splynou mezi sebou všechny hyperboly atd.
Ukážeme si hlavní rozdíl postupu na kvadratických formách.

Uvažme nějakou kvadratickou formu f na vektorovém prostoru V a její analytické vyjádření $f(u) = x^T Ax$ vzhledem ke zvolené bázi na V. Pro vektor $u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$ pak také zapisujeme formu f ve tvaru

$$f(x_1, n) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j,$$

V předchozích odstavcích jsme již s využitím skalárního součinu ukázali, že pro vhodnou bázi bude matice A diagonální, tj. že pro příslušnou symetrickou formu F bude platit $F(u_i, u_j) = 0$ při $i \neq j$. Každou takovou bázi nazýváme **polární báze** kvadratické formy f. Samozřejmě si pro takový účel můžeme vždy skalární součin vybrat.

Uvažme nějakou kvadratickou formu f na vektorovém prostoru V a její analytické vyjádření $f(u) = x^T Ax$ vzhledem ke zvolené bázi na V. Pro vektor $u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$ pak také zapisujeme formu f ve tvaru

$$f(x_1, n) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j,$$

V předchozích odstavcích jsme již s využitím skalárního součinu ukázali, že pro vhodnou bázi bude matice A diagonální, tj. že pro příslušnou symetrickou formu F bude platit $F(u_i, u_j) = 0$ při $i \neq j$. Každou takovou bázi nazýváme **polární báze** kvadratické formy f. Samozřejmě si pro takový účel můžeme vždy skalární součin vybrat. Existuje daleko jednodušší algoritmus na to, jak takovou polární bázi najít mezi všemi bazemi. Tím se zároveň dovíme podstatné informace o afinních vlastnostech kvadratických forem. Nasledující věta bývá v literatuře uváděna pod názvem **Lagrangeův algoritmus**.

Lagrangeův algoritmus doplňování na čtverce

Nechť V je reálný vektorový prostor dimenze n, $f : V \to \mathbb{R}$ kvadratická forma. Pak na V získáme polární bázi pro f takto:

Lagrangeův algoritmus doplňování na čtverce

Nechť V je reálný vektorový prostor dimenze n, $f : V \to \mathbb{R}$ kvadratická forma. Pak na V získáme polární bázi pro f takto:
(1) Nechť A je matice f v bázi $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na V a předpokládejme $a_{11} \neq 0$. Pak můžeme psát

$$
\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{22}x_2^2 + \dots \\
&= a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 \\
&\quad + \text{členy neobsahující } x_1
\end{aligned}
$$

Provedeme tedy transformaci souřadnic (tj. změnu báze) tak, aby v nových souřadnicích bylo

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n,\ x_2' = x_2, \dots, x_n' = x_n.$$

pokračování

To odpovídá nové bázi
$v_1 = a_{11}^{-1}u_1,\ v_2 = u_2 - a_{11}^{-1}a_{12}u_1, \dots, v_n = u_n - a_{11}^{-1}a_{1n}u_1$ a tak jak lze očekávat, v nové bázi bude příslušná symetrická bilinerání forma splňovat $g(v_1, v_i) = 0$ pro všechny $i > 0$. Má tedy f v nových souřadnicích analytický tvar $a_{11}^{-1}x_1'^2 + h$, kde h je kvadratická forma nezávislá na proměnné x_1.
Z technických důvodů bývá lepší zvolit v nové bázi $v_1 = u_1$, opět dostaneme výraz $f = f_1 + h$, kde f_1 závisí pouze na x_1', zatímco v h se x_1' nevyskytuje. Přitom pak $g(v_1, v_1) = a_{11}$.

pokračování

To odpovídá nové bázi
$v_1 = a_{11}^{-1} u_1,\ v_2 = u_2 - a_{11}^{-1} a_{12} u_1, \dots, v_n = u_n - a_{11}^{-1} a_{1n} u_1$ a tak jak lze očekávat, v nové bázi bude příslušná symetrická bilinerání forma splňovat $g(v_1, v_i) = 0$ pro všechny $i > 0$. Má tedy f v nových souřadnicích analytický tvar $a_{11}^{-1} x_1'^2 + h$, kde h je kvadratická forma nezávislá na proměnné x_1.
Z technických důvodů bývá lepší zvolit v nové bázi $v_1 = u_1$, opět dostaneme výraz $f = f_1 + h$, kde f_1 závisí pouze na x_1', zatímco v h se x_1' nevyskytuje. Přitom pak $g(v_1, v_1) = a_{11}$.
(2) Předpokládejme, že po provedení kroku (1) dostaneme pro h matici (řádu o jedničku menšího) s koeficientem u $x_2'^2$ různým od nuly. Pak můžeme zopakovat přesně stejný postup a získáme vyjádření $f = f_1 + f_2 + h$, kde v h vystupují pouze proměnné s indexem větším než dvě. Tak můžeme postupovat tak dlouho, až buď provedeme $n - 1$ kroků a získáme diagonální tvar, nebo v řekněme i-tém kroku bude prvek a_{ii} dosud získané matice nulový.

pokračování

(3) Nastane-li poslední možnost, ale přitom existuje jiný prvek $a_{jj} \neq 0$ s $j > i$, pak stačí přehodit i-tý prvek báze s j-tým a pokračovat podle předešlého postupu.

pokračování

(3) Nastane-li poslední možnost, ale přitom existuje jiný prvek $a_{jj} \neq 0$ s $j > i$, pak stačí přehodit i-tý prvek báze s j-tým a pokračovat podle předešlého postupu.
(4) Předpokládejme, že jsme narazili na situaci $a_{jj} = 0$ pro všechny $j \geq i$. Pokud přitom neexistuje ani žádný jiný prvek $a_{jk} \neq 0$ s $j \geq i$, $k \geq i$, pak jsme již úplně hotovi neboť jsme již dosáhli diagonální matici. Předpokládejme, že $a_{jk} \neq 0$. Použijeme pak transformaci $v_j = u_j + u_k$, ostatní vektory báze ponecháme (tj. $x'_k = x_k - x_j$, ostatní zůstávají). Pak
$h(v_j, v_j) = h(u_j, u_j) + h(u_k, u_k) + 2h(u_k, u_j) = 2a_{jk} \neq 0$ a můžeme pokračovat podle postupu v (1).

Po výpočtu polární báze Lagrangeovým algoritmem můžeme ještě vylepšit bázové vektory pomocí násobení skalárem tak, aby v příslušném analytickém vyjádření naší formy vystupovaly v roli koeficientů u kvadrátů jednotlivých souřadnic pouze skaláry 1, -1 a 0.

Po výpočtu polární báze Lagrangeovým algoritmem můžeme ještě vylepšit bázové vektory pomocí násobení skalárem tak, aby v příslušném analytickém vyjádření naší formy vystupovaly v roli koeficientů u kvadrátů jednotlivých souřadnic pouze skaláry 1, -1 a 0.

Počty jedniček a mínus jedniček nazýváme **signaturou kvadratické formy**. Opět tedy dostáváme úplný popis kvadratických forem ve smyslu, že dvě takové formy jsou převoditelná jedna na druhou pomocí afinní transformace tehdy a jen tehdy, když mají stejnou signaturu:

Theorem (věta o setrvačnosti)

Pro každou nenulovou kvadratickou formu hodnosti r na reálném vektorovém prostoru V existuje celé číslo $0 \leq p \leq r$ a r nezávislých lineárních forem $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*$ takových, že

$$f(u) = (\varphi_1(u))^2 + \cdots + (\varphi_p(u))^2 - (\varphi_{p+1}(u))^2 - \cdots - (\varphi_r(u))^2.$$

Jinak řečeno, existuje polární báze, ve které má f analytické vyjádření

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2.$$

Počet p kladných diagonálních koeficientů v matici dané kvadratické formy nezávisí na volbě polární báze.

Theorem (věta o setrvačnosti)

Pro každou nenulovou kvadratickou formu hodnosti r na reálném vektorovém prostoru V existuje celé číslo $0 \leq p \leq r$ a r nezávislých lineárních forem $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*$ takových, že

$$f(u) = (\varphi_1(u))^2 + \dots + (\varphi_p(u))^2 - (\varphi_{p+1}(u))^2 - \dots - (\varphi_r(u))^2.$$

Jinak řečeno, existuje polární báze, ve které má f analytické vyjádření

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2.$$

Počet p kladných diagonálních koeficientů v matici dané kvadratické formy nezávisí na volbě polární báze.
Dvě symetrické matice A, B dimenze n jsou maticemi téže kvadratické formy v různých bazích právě, když mají stejnou hodnost a když matice příslušných forem v polární bázi mají stejný počet kladných koeficientů.

Při diskusi symetrických zobrazení jsme hovořili o definitních a semidefitních zobrazeních. Tatáž diskuse má jasný smysl i pro symetrické bilineární formy a kvadratické formy.

Kvadratickou formu f forma na reálném vektorovém prostoru V nazýváme

1. **positivně definitní**, je-li $f(u) > 0$ pro všechny $u \neq 0$
2. **positivně semidefinitní**, je-li $f(u) \geq 0$ pro všechny $u \in V$
3. **negativně definitní**, je-li $f(u) < 0$ pro všechny $u \neq 0$
4. **negativně semidefinitní**, je-li $f(u) \leq 0$ pro všechny $u \in V$
5. **indefinitní**, je-li $f(u) > 0$ a $f(v) < 0$ pro vhodné $u, v \in V$.

Stejné názvy používáme i pro symetrické reálné matice, jsou-li maticemi patřičných kvadratických forem. Signaturou symetrické matice pak rozumíme signaturu příslušné kvadratické formy.

Sylvestrovo kritérium

Theorem

Kvadratická forma je pozitivně definitní právě, když všechny hlavní minory její matice S v nějaké bázi jsou kladné.
Negativně definitní je právě tehdy když hlavní minory střídají znaménka, počínaje záporným.