Drsná matematika I – 14
Afinní klasifikace kvadrik, projektivní rozšíření

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

16.–20.12. 2019

Obsah přednášky

Plán přednášky

1. Literatura
2. Afinní klasifikace kvadrik
3. Projektivní geometrie
4. Projektivní klasifikace kvadrik

Kde je dobré číst?

- vlastní poznámky, texty současného nebo předcházejícího přednášejícího, GOOGLE, atd.

Kde je dobré číst?

- vlastní poznámky, texty současného nebo předcházejícího přednášejícího, GOOGLE, atd.
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta.
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/~lmotm275/skripta/).
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.
- František Šik, Lineární algebra zaměřená na numerickou analýzu, MU, 1998, 176 s. ISBN 80-210-1996-2.

Plán přednášky

Afinní pohled na kvadriky

Geometrická formulace našeho popisu kvadrik je, že pro dva různé objekty – kvadriky, zadané v obecně různých kartézských souřadnicích, existuje **euklidovská transformace** na $\mathcal{E}_n$ (tj. afinní bijektivní zobrazení zachovávající velikosti) tehdy a jen tehdy, pokud výše uvedený algoritmus vede na stejný analytický tvar, až na pořadí souřadnic.

Afinní pohled na kvadriky

Geometrická formulace našeho popisu kvadrik je, že pro dva různé objekty – kvadriky, zadané v obecně různých kartézských souřadnicích, existuje **euklidovská transformace** na $\mathcal{E}_n$ (tj. afinní bijektivní zobrazení zachovávající velikosti) tehdy a jen tehdy, pokud výše uvedený algoritmus vede na stejný analytický tvar, až na pořadí souřadnic.

Pochopitelně se můžeme ptát, do jaké míry umíme podobnou věc v afinních prostorech, tj. s volností výběru jakékoliv afinní souřadné soustavy. Např. v rovině to bude znamenat, že neumíme rozlišit kružnici od elipsy, samozřejmě bychom ale měli odlišit hyperbolu a všechny ostatní typy kuželoseček. Hlavně ale splynou mezi sebou všechny hyperboly atd.

Afinní pohled na kvadriky

Geometrická formulace našeho popisu kvadrik je, že pro dva různé objekty – kvadriky, zadané v obecně různých kartézských souřadnicích, existuje **euklidovská transformace** na $\mathcal{E}_n$ (tj. afinní bijektivní zobrazení zachovávající velikosti) tehdy a jen tehdy, pokud výše uvedený algoritmus vede na stejný analytický tvar, až na pořadí souřadnic.

Pochopitelně se můžeme ptát, do jaké míry umíme podobnou věc v afinních prostorech, tj. s volností výběru jakékoliv afinní souřadné soustavy. Např. v rovině to bude znamenat, že neumíme rozlišit kružnici od elipsy, samozřejmě bychom ale měli odlišit hyperbolu a všechny ostatní typy kuželoseček. Hlavně ale splynou mezi sebou všechny hyperboly atd.

Ukážeme si hlavní rozdíl postupu na kvadratických formách.

Uvažme nějakou kvadratickou formu f na vektorovém prostoru V a její analytické vyjádření $f(u) = x^T A x$ vzhledem ke zvolené bázi na V. Pro vektor $u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$ pak také zapisujeme formu f ve tvaru

$$f(x_1, n) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j,$$

V předchozích odstavcích jsme již s využitím skalárního součinu ukázali, že pro vhodnou bázi bude matice A diagonální, tj. že pro příslušnou symetrickou formu F bude platit $F(u_i, u_j) = 0$ při $i \neq j$. Každou takovou bázi nazýváme **polární báze** kvadratické formy f. Samozřejmě si pro takový účel můžeme vždy skalární součin vybrat.

Uvažme nějakou kvadratickou formu f na vektorovém prostoru V a její analytické vyjádření $f(u) = x^T Ax$ vzhledem ke zvolené bázi na V. Pro vektor $u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$ pak také zapisujeme formu f ve tvaru

$$f(x_1, n) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j,$$

V předchozích odstavcích jsme již s využitím skalárního součinu ukázali, že pro vhodnou bázi bude matice A diagonální, tj. že pro příslušnou symetrickou formu F bude platit $F(u_i, u_j) = 0$ při $i \neq j$. Každou takovou bázi nazýváme **polární báze** kvadratické formy f. Samozřejmě si pro takový účel můžeme vždy skalární součin vybrat. Existuje daleko jednodušší algoritmus na to, jak takovou polární bázi najít mezi všemi bazemi. Tím se zároveň dovíme podstatné informace o afinních vlastnostech kvadratických forem. Nasledující věta bývá v literatuře uváděna pod názvem **Lagrangeův algoritmus**.

Lagrangeův algoritmus doplňování na čtverce

Nechť V je reálný vektorový prostor dimenze n, $f : V \to \mathbb{R}$ kvadratická forma. Pak na V získáme polární bázi pro f takto:

Lagrangeův algoritmus doplňování na čtverce

Nechť V je reálný vektorový prostor dimenze n, $f : V \to \mathbb{R}$ kvadratická forma. Pak na V získáme polární bázi pro f takto:
(1) Nechť A je matice f v bázi $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na V a předpokládejme $a_{11} \neq 0$. Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{22}x_2^2 + \dots \\ &= a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 \\ &\qquad + \text{členy neobsahující } x_1 \end{aligned}$$

Provedeme tedy transformaci souřadnic (tj. změnu báze) tak, aby v nových souřadnicích bylo

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n,\ x_2' = x_2, \dots, x_n' = x_n.$$

pokračování

To odpovídá nové bázi
$v_1 = a_{11}^{-1} u_1$, $v_2 = u_2 - a_{11}^{-1} a_{12} u_1, \dots, v_n = u_n - a_{11}^{-1} a_{1n} u_1$ a tak jak lze očekávat, v nové bázi bude příslušná symetrická bilinerání forma splňovat $g(v_1, v_i) = 0$ pro všechny $i > 0$. Má tedy f v nových souřadnicích analytický tvar $a_{11}^{-1} x_1'^2 + h$, kde h je kvadratická forma nezávislá na proměnné x_1.
Z technických důvodů bývá lepší zvolit v nové bázi $v_1 = u_1$, opět dostaneme výraz $f = f_1 + h$, kde f_1 závisí pouze na x_1', zatímco v h se x_1' nevyskytuje. Přitom pak $g(v_1, v_1) = a_{11}$.

pokračování

To odpovídá nové bázi
$v_1 = a_{11}^{-1} u_1,\ v_2 = u_2 - a_{11}^{-1} a_{12} u_1, \dots, v_n = u_n - a_{11}^{-1} a_{1n} u_1$ a tak jak lze očekávat, v nové bázi bude příslušná symetrická bilinerání forma splňovat $g(v_1, v_i) = 0$ pro všechny $i > 0$. Má tedy f v nových souřadnicích analytický tvar $a_{11}^{-1} x_1'^2 + h$, kde h je kvadratická forma nezávislá na proměnné x_1.
Z technických důvodů bývá lepší zvolit v nové bázi $v_1 = u_1$, opět dostaneme výraz $f = f_1 + h$, kde f_1 závisí pouze na x_1', zatímco v h se x_1' nevyskytuje. Přitom pak $g(v_1, v_1) = a_{11}$.
(2) Předpokládejme, že po provedení kroku (1) dostaneme pro h matici (řádu o jedničku menšího) s koeficientem u $x_2'^2$ různým od nuly. Pak můžeme zopakovat přesně stejný postup a získáme vyjádření $f = f_1 + f_2 + h$, kde v h vystupují pouze proměnné s indexem větším než dvě. Tak můžeme postupovat tak dlouho, až buď provedeme $n - 1$ kroků a získáme diagonální tvar, nebo v řekněme i-tém kroku bude prvek a_{ii} dosud získané matice nulový.

pokračování

(3) Nastane-li poslední možnost, ale přitom existuje jiný prvek $a_{jj} \neq 0$ s $j > i$, pak stačí přehodit i-tý prvek báze s j-tým a pokračovat podle předešlého postupu.

pokračování

(3) Nastane-li poslední možnost, ale přitom existuje jiný prvek $a_{jj} \neq 0$ s $j > i$, pak stačí přehodit i-tý prvek báze s j-tým a pokračovat podle předešlého postupu.
(4) Předpokládejme, že jsme narazili na situaci $a_{jj} = 0$ pro všechny $j \geq i$. Pokud přitom neexistuje ani žádný jiný prvek $a_{jk} \neq 0$ s $j \geq i$, $k \geq i$, pak jsme již úplně hotovi neboť jsme již dosáhli diagonální matici. Předpokládejme, že $a_{jk} \neq 0$. Použijeme pak transformaci $v_j = u_j + u_k$, ostatní vektory báze ponecháme (tj. $x'_k = x_k - x_j$, ostatní zůstávají). Pak $h(v_j, v_j) = h(u_j, u_j) + h(u_k, u_k) + 2h(u_k, u_j) = 2a_{jk} \neq 0$ a můžeme pokračovat podle postupu v (1).

Po výpočtu polární báze Lagrangeovým algoritmem můžeme ještě vylepšit bázové vektory pomocí násobení skalárem tak, aby v příslušném analytickém vyjádření naší formy vystupovaly v roli koeficientů u kvadrátů jednotlivých souřadnic pouze skaláry 1, -1 a 0.

Po výpočtu polární báze Lagrangeovým algoritmem můžeme ještě vylepšit bázové vektory pomocí násobení skalárem tak, aby v příslušném analytickém vyjádření naší formy vystupovaly v roli koeficientů u kvadrátů jednotlivých souřadnic pouze skaláry 1, -1 a 0.

Počty jedniček a mínus jedniček nazýváme **signaturou kvadratické formy**. Opět tedy dostáváme úplný popis kvadratických forem ve smyslu, že dvě takové formy jsou převoditelná jedna na druhou pomocí afinní transformace tehdy a jen tehdy, když mají stejnou signaturu:

Theorem (věta o setrvačnosti)

Pro každou nenulovou kvadratickou formu hodnosti r na reálném vektorovém prostoru V existuje celé číslo $0 \leq p \leq r$ a r nezávislých lineárních forem $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*$ takových, že

$$f(u) = (\varphi_1(u))^2 + \dots + (\varphi_p(u))^2 - (\varphi_{p+1}(u))^2 - \dots - (\varphi_r(u))^2.$$

Jinak řečeno, existuje polární báze, ve které má f analytické vyjádření

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2.$$

Počet p kladných diagonálních koeficientů v matici dané kvadratické formy nezávisí na volbě polární báze.

Theorem (věta o setrvačnosti)

Pro každou nenulovou kvadratickou formu hodnosti r na reálném vektorovém prostoru V existuje celé číslo $0 \leq p \leq r$ a r nezávislých lineárních forem $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*$ takových, že

$$f(u) = (\varphi_1(u))^2 + \cdots + (\varphi_p(u))^2 - (\varphi_{p+1}(u))^2 - \cdots - (\varphi_r(u))^2.$$

Jinak řečeno, existuje polární báze, ve které má f analytické vyjádření

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2.$$

Počet p kladných diagonálních koeficientů v matici dané kvadratické formy nezávisí na volbě polární báze.
Dvě symetrické matice A, B dimenze n jsou maticemi téže kvadratické formy v různých bazích právě, když mají stejnou hodnost a když matice příslušných forem v polární bázi mají stejný počet kladných koeficientů.

Při diskusi symetrických zobrazení jsme hovořili o definitních a semidefitních zobrazeních. Tatáž diskuse má jasný smysl i pro symetrické bilineární formy a kvadratické formy.

Kvadratickou formu f forma na reálném vektorovém prostoru V nazýváme

1. **positivně definitní**, je-li $f(u) > 0$ pro všechny $u \neq 0$
2. **positivně semidefinitní**, je-li $f(u) \geq 0$ pro všechny $u \in V$
3. **negativně definitní**, je-li $f(u) < 0$ pro všechny $u \neq 0$
4. **negativně semidefinitní**, je-li $f(u) \leq 0$ pro všechny $u \in V$
5. **indefinitní**, je-li $f(u) > 0$ a $f(v) < 0$ pro vhodné $u, v \in V$.

Stejné názvy používáme i pro symetrické reálné matice, jsou-li maticemi patřičných kvadratických forem. Signaturou symetrické matice pak rozumíme signaturu příslušné kvadratické formy.

Sylvestrovo kritérium

Theorem

Kvadratická forma je pozitivně definitní právě, když všechny hlavní minory její matice S v nějaké bázi jsou kladné.
Negativně definitní je právě tehdy když hlavní minory střídají znaménka, počínaje záporným.

Plán přednášky

Na mnoho praktických úloh euklidovská nebo afinní geometrie stačí, na jiné bohužel ale nikoliv:

Na mnoho praktických úloh euklidovská nebo afinní geometrie stačí, na jiné bohužel ale nikoliv:

- při zpracovávání obrazu z kamery nejsou zachovávány úhly a rovnoběžné přímky se mohou (ale nemusí) protínat.
- robustnost a jednoduchost numerických operací při zpracování scén.

Na mnoho praktických úloh euklidovská nebo afinní geometrie stačí, na jiné bohužel ale nikoliv:

- při zpracovávání obrazu z kamery nejsou zachovávány úhly a rovnoběžné přímky se mohou (ale nemusí) protínat.
- robustnost a jednoduchost numerických operací při zpracování scén.

Základní ideou projektivní geometrie je rozšíření afinních prostorů o body v nekonečnu způsobem, který bude dobře umožňovat manipulace s lineárními objekty typu bodů, přímek, rovin, projekcí, apod.

Body roviny $\mathcal{A}_2$ si představíme jako rovinu $z = 1$ v $\mathcal{R}^3$. Pak každý bod P představuje vektor $u = (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$ a tím i jednorozměrný podprostor $\langle u \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Naopak, skoro každý podprostor v $\mathbb{R}^3$ protíná naši rovinu v právě jednom bodě P a jednotlivé vektory takového podprostoru jsou dány souřadnicemi (x, y, z) jednoznačně, až na společný skalární násobek. Žádný průnik s naší rovinou nebudou mít pouze podprostory s body o souřadnicích $(x, y, 0)$.

Body roviny $\mathcal{A}_2$ si představíme jako rovinu $z = 1$ v $\mathcal{R}^3$. Pak každý bod P představuje vektor $u = (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$ a tím i jednorozměrný podprostor $\langle u \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Naopak, skoro každý podprostor v $\mathbb{R}^3$ protíná naši rovinu v právě jednom bodě P a jednotlivé vektory takového podprostoru jsou dány souřadnicemi (x, y, z) jednoznačně, až na společný skalární násobek. Žádný průnik s naší rovinou nebudou mít pouze podprostory s body o souřadnicích $(x, y, 0)$.

Definition

Projektivní rovina $\mathcal{P}_2$ je množina všech jednorozměrných podprostorů v $\mathbb{R}^3$. **Homogenní souřadnice** bodu $P = (x : y : z)$ v projektivní rovině jsou trojice reálných čísel určené až na společný skalární násobek a alespoň jedno z nich musí být nenulové. Přímka v projektivní rovině je definována jako množina jednorozměrných podprostorů (tj. bodů v $\mathcal{P}_2$), které společně vyplní rovinu v $\mathbb{R}^3$.

Example

V afinním prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažujme dvě přímky $L_1 : y - x - 1 = 0$ a $L_2 : y - x + 1 = 0$.
Jsou-li body přímek L_1 a L_2 konečné body v projektivním prostoru $\mathcal{P}_2$, jsou jejich homogenní souřadnice $(x : y : z)$ dány:

$$L_1 : y - x - z = 0, \quad L_2 : y - x + z = 0.$$

Example

V afinním prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažujme dvě přímky $L_1 : y - x - 1 = 0$ a $L_2 : y - x + 1 = 0$.
Jsou-li body přímek L_1 a L_2 konečné body v projektivním prostoru $\mathcal{P}_2$, jsou jejich homogenní souřadnice $(x : y : z)$ dány:

$$L_1 : y - x - z = 0, \quad L_2 : y - x + z = 0.$$

Jak dostaneme rovnice těchto přímek v souřadnicích v afinní rovině s $y = 1$? Dosadíme $y = 1$ do předchozích rovnic:

$$L_1' : 1 - x - z = 0, \quad L_2' : 1 - x + z = 0$$

Example

V afinním prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažujme dvě přímky $L_1 : y - x - 1 = 0$ a $L_2 : y - x + 1 = 0$.
Jsou-li body přímek L_1 a L_2 konečné body v projektivním prostoru $\mathcal{P}_2$, jsou jejich homogenní souřadnice $(x : y : z)$ dány:

$$L_1 : y - x - z = 0, \quad L_2 : y - x + z = 0.$$

Jak dostaneme rovnice těchto přímek v souřadnicích v afinní rovině s $y = 1$? Dosadíme $y = 1$ do předchozích rovnic:

$$L_1' : 1 - x - z = 0, \quad L_2' : 1 - x + z = 0$$

Nyní jsou „nekonečné“ body naší původní afinní roviny dány vztahem $z = 0$ a naše přímky L_1' a L_2' se protínají v bodě $(1, 1, 0)$.
To odpovídá geometrické představě, že rovnoběžné přímky L_1, L_2 v afinní rovině se protínají v nekonečnu (a to v bodě $(1 : 1 : 0)$).

Volbou libovolné afinní nadroviny $\mathcal{A}_n$ ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, která neprochází počátkem, můžeme ztotožnit body $P \in \mathcal{A}_n$ s jednorozměrnými podprostory, které tyto generují. Zbylé jednorozměrné podprostory vyplní rovinu rovnoběžnou s $\mathcal{A}_n$ a říkáme jim „nekonečné body" v projektivním rozšíření $\mathcal{P}_n$ afinní nadroviny $\mathcal{A}_n$. Zjevně je vždy množina nekonečných bodů v $\mathcal{P}_n$ projektivním prostorem dimenze o jedničku nižším. Abstraktněji hovoříme o **projektivizaci vektorového prostoru**: pro libovolný vektorový prostor V dimenze $n+1$ definujeme

$$\mathcal{P}(V) = \{P \subset V;\ P \text{ je jednorozměrný vektorový podprostor}\}.$$

Volbou libovolné afinní nadroviny $\mathcal{A}_n$ ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, která neprochází počátkem, můžeme ztotožnit body $P \in \mathcal{A}_n$ s jednorozměrnými podprostory, které tyto generují. Zbylé jednorozměrné podprostory vyplní rovinu rovnoběžnou s $\mathcal{A}_n$ a říkáme jim „nekonečné body" v projektivním rozšíření $\mathcal{P}_n$ afinní nadroviny $\mathcal{A}_n$. Zjevně je vždy množina nekonečných bodů v $\mathcal{P}_n$ projektivním prostorem dimenze o jedničku nižším. Abstraktněji hovoříme o **projektivizaci vektorového prostoru**: pro libovolný vektorový prostor V dimenze $n+1$ definujeme

$$\mathcal{P}(V) = \{P \subset V;\ P \text{ je jednorozměrný vektorový podprostor}\}.$$

Volbou libovolné báze $\underline{u}$ ve V dostáváme tzv. **homogenní souřadnice** na $\mathcal{P}(V)$ tak, že pro $P \in \mathcal{P}(V)$ použijeme jeho libovolný nenulový vektor $u \in V$ a souřadnice tohoto vektoru v bázi $\underline{u}$. Afinní přímka má tedy ve svém projektivním rozšíření pouze jediný bod (oba konce se „potkají" v nekonečnu a projektivní přímka vypadá jako kružnice), projektivní rovina má projektivní přímku nekonečných bodů atd.

Při zvolených homogenních souřadnicích je možné jednu z jejich hodnot zafixovat na jedničku (tj. vyloučíme všechny body projektivního prostoru s touto souřadnicí nulovou) a získáme tak vložení n–rozměrného afinního prostoru $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{P}(V)$. To je přesně konstrukce, kterou jsme použili v opačném směru v příkladu projektivní roviny.

Při zvolených homogenních souřadnicích je možné jednu z jejich hodnot zafixovat na jedničku (tj. vyloučíme všechny body projektivního prostoru s touto souřadnicí nulovou) a získáme tak vložení n–rozměrného afinního prostoru $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{P}(V)$. To je přesně konstrukce, kterou jsme použili v opačném směru v příkladu projektivní roviny.

Každé prosté lineární zobrazení $\tau : V_1 \to V_2$ mezi vektorovými prostory samozřejmě zobrazuje jednorozměrné podprostory na jednorozměrné podprostory. Tím vzniká zobrazení na projektivizacích $T : \mathcal{P}(V_1) \to \mathcal{P}(V_2)$. Takovým zobrazením říkáme **projektivní zobrazení**. Jinak řečeno, projektivní zobrazení je takové zobrazení mezi projektivními prostory, že v každé soustavě homogenních souřadnic na definičním oboru i obrazu je toto zobrazení zadáno násobením vhodnou maticí. Obecněji, pokud naše pomocné lineární zobrazení není prosté, definuje projektivní zobrazení pouze mimo svoje jádro, tj. na bodech, jejichž homogenní souřadnice se nezobrazují na nulu.

Ilustrujme výhodu projektivní geometrie na perspektivní projekci $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Bod (X, Y, Z) „reálného světa" se promítá na bod (x, y) na průmětně takto:

$$x = -f\frac{X}{Z}, \quad y = -f\frac{Y}{Z}.$$

To je nejen nelineární formule, ale navíc při Z malém bude velice problematická přesnost výpočtů.

Ilustrujme výhodu projektivní geometrie na perspektivní projekci $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Bod (X, Y, Z) „reálného světa" se promítá na bod (x, y) na průmětně takto:

$$x = -f\frac{X}{Z}, \quad y = -f\frac{Y}{Z}.$$

To je nejen nelineární formule, ale navíc při Z malém bude velice problematická přesnost výpočtů.
Při rozšíření této transformace na zobrazení $\mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ dostáváme zobrazení $(X : Y : Z : W) \mapsto (x : y : z) = (-fX : -fY : Z)$, tj. popsané prostou lineární formulí

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$$

Tento jednoduchý výraz zadává perspektivní projekci pro všechny konečné body v $\mathbb{R}^3 \subset \mathcal{P}_3$, které dosazujeme jako výrazy s $W = 1$. Navíc jsme odstranili problémy s body, jejichž obraz leží v nekonečnu. Skutečně, je–li Z-ová souřadnice skutečného bodu scény blízká nule, bude hodnota třetí homogenní souřadnice obrazu mít souřadnici blízkou nule, tj. bude představovat bod blízký nekonečnu.

Invertibilní projektivní zobrazení projektivního prostoru $\mathcal{P}_n$ na sebe odpovídají v homogenních souřadnicích invertibilním maticím dimenze $n+1$. Dvě takové matice zadávají stejnou projektivní transformaci právě, když se liší o konstantní násobek.

Invertibilní projektivní zobrazení projektivního prostoru $\mathcal{P}_n$ na sebe odpovídají v homogenních souřadnicích invertibilním maticím dimenze $n+1$. Dvě takové matice zadávají stejnou projektivní transformaci právě, když se liší o konstantní násobek.
Jestliže si zvolíme první souřadnici jako tu, jejíž nulovost určuje nekonečné body, budou transformace, které zachovávají konečné body, dány maticemi, jejichž první řádek musí být až na první člen nulový. Jestliže budeme chtít přejít do afinních souřadnic konečných bodů, tj. zafixujeme si hodnotu první souřadnice na jedničku, musí být první prvek na prvním řádku být také rovný jedné.

Matice projektivních transformací zachovávajících konečné body tedy mají tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kde $b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ a $A = (a_{ij})$ je invertibilní matice dimenze n. Působení takové matice na vektoru $(1, x_1, \dots, x_n)$ je právě obecná afinní transformace.

Plán přednášky

Jestliže popíšeme kvadriku v afinních souřadnicích pomocí obecné kvadratické rovnice, viz výše, jejím přepsáním v homogenních souřadnicích dostaneme vždy výlučně homogenní výraz, jehož všechny členy jsou druhého řádu. Důvod je ten, že pouze takové homogenní výrazy budou mít pro homogenní souřadnice smysl nezávisle na zvoleném konstantním násobku souřadnic $(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Hledáme tedy takový, jehož zúžením na afinní souřadnice, tj. dosazením $x_0 = 1$, získáme původní výraz. To je ale mimořádně jednoduché, prostě dopíšeme dostatek x_0 ke všem výrazům – žádny ke kvadratickým členům, jedno k lineárním a x_0^2 ke konstantnímu členu.

Jestliže popíšeme kvadriku v afinních souřadnicích pomocí obecné kvadratické rovnice, viz výše, jejím přepsáním v homogenních souřadnicích dostaneme vždy výlučně homogenní výraz, jehož všechny členy jsou druhého řádu. Důvod je ten, že pouze takové homogenní výrazy budou mít pro homogenní souřadnice smysl nezávisle na zvoleném konstantním násobku souřadnic $(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Hledáme tedy takový, jehož zúžením na afinní souřadnice, tj. dosazením $x_0 = 1$, získáme původní výraz. To je ale mimořádně jednoduché, prostě dopíšeme dostatek x_0 ke všem výrazům – žádny ke kvadratickým členům, jedno k lineárním a x_0^2 ke konstantnímu členu.
Získáme tak dobře definovanou kvadratickou formu na našem pomocném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, ale jsme už vůči libovolné volbě báze klasifikovali. Zkuste si samostatně převést tuto klasifikaci do projektivní i afinní podoby. (Hezké a náročné cvičení na závěr semestru!)

Example

Nalezněte polární bázi kvadratické formy $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je ve standardní bázi dána předpisem

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3.$$

Example

Nalezněte polární bázi kvadratické formy $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je ve standardní bázi dána předpisem

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3.$$

Aplikací uvedeného Lagrangeova algoritmu dostáváme:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}y_1^2 - 2y_3^2 + \frac{3}{8}x_3^2.$$

Example (pokračování)

V souřadnicích y_1, y_3, x_3 má tedy daná kvadratická forma diagonální tvar, to znamená že báze příslušná těmto souřadnicím je polární bází dané kvadratické formy. Pokud ji máme vyjádřit musíme získat matici přechodu od této polární báze ke standardní bázi. Z definice matice přechodu jsou pak její sloupce bázovými vektory polární bázi. Matici přechodu získáme tak, že buď vyjádříme staré proměnné (x_1, x_2, x_3) pomocí nových proměnných (y_1, y_3, x_3), nebo ekvivalentně vyjádříme nové proměnné pomocí starých (což jde jednodušeji), pak ale musíme spočítat inverzní matici.

Example (pokračování)

V souřadnicích y_1, y_3, x_3 má tedy daná kvadratická forma diagonální tvar, to znamená že báze příslušná těmto souřadnicím je polární bází dané kvadratické formy. Pokud ji máme vyjádřit musíme získat matici přechodu od této polární báze ke standardní bázi. Z definice matice přechodu jsou pak její sloupce bázovými vektory polární bázi. Matici přechodu získáme tak, že buď vyjádříme staré proměnné (x_1, x_2, x_3) pomocí nových proměnných (y_1, y_3, x_3), nebo ekvivalentně vyjádříme nové proměnné pomocí starých (což jde jednodušeji), pak ale musíme spočítat inverzní matici.
Máme $y_1 = 2x_1 + y_2 + \frac{1}{2}x_3 = 2x_1 + (x_2 - x_1) + \frac{1}{2}x_3$ a $y_3 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_3$. Matice přechodu od standardní báze ke zvolené polární je tedy

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Example (pokračování)

Pro inverzní matici pak máme

$$T^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jedna z polárních bazí dané kvadratické formy je tedy například báze $\{(1/3, 1/3, 0), (-2/3, 4/3, 0), (-1/2, 1/2, 1)\}$.

Example

Určete typ kuželosečky dané rovnicí:

$$3x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2 - 1 = 0.$$

Example

Určete typ kuželosečky dané rovnicí:

$$3x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2 - 1 = 0.$$

Pomocí algoritmu úpravy na čtverec postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} 3x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2 - 1 &= \frac{1}{3}(3x_1 - \frac{3}{2}x_2)^2 - \frac{3}{4}x_2^2 + x_2 - 1 = \\ &= \frac{1}{3}y_1^2 - \frac{4}{3}(\frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3} - 1 = \\ &= \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{4}{3}y_2^2 - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Podle uvedeného seznamu kuželoseček se tedy jedná o hyperbolu.