Matematika I – 4
Relace a zobrazení

Jan Slovák

Masarykova univerzita, Fakulta informatiky

podzim 2019

Obsah přednášky

Plán přednášky

Definition

Binární relací mezi množinami A a B rozumíme podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$. Často píšeme $a \simeq_R b$ pro vyjádření skutečnosti, že $(a, b) \in R$, tj. že body $a \in A$ a $b \in B$ jsou v relaci R. **Definičním oborem relace** je podmnožina

$$D \subset A, \quad D = \{a \in A; \exists b \in B, (a, b) \in R\}.$$

Podobně **oborem hodnot relace** je podmnožina

$$I \subset B, \quad I = \{b \in B; \exists a \in A, (a, b) \in R\}.$$

Zobrazení je taková relace $R \subset A \times B$, pro kterou je každé $a \in D$ v relaci s právě jedním $b \in I$.
Zobrazení i relace lze přirozeným způsobem skládat, inverzní relace R je taková relace $R^{-1} \subset B \times A$, kde máme dvojice prvků prohozeny.
Inverze každé relace existuje, inverze zobrazení ale nemusí být zobrazením.
Říkáme, že zobrazení f má inverzi, jestliže je k němu inverzní relace opět zobrazením. Pak platí, že $f^{-1} \circ f$ a $f \circ f^{-1}$ jsou tzv. **identické relace**, tj. obsahuje pouze dvojice stejných prvků z D a I.

Definition

V případě $A = B$ hovoříme o relaci na množině A. Říkáme, že R je:

- **reflexivní**, pokud $\mathrm{id}_A \subset R$ (tj. $(a, a) \in R$ pro všechny $a \in A$),
- **symetrická**, pokud $R^{-1} = R$ (tj. pokud $(a, b) \in R$, pak i $(b, a) \in R$),
- **antisymetrická**, pokud $R^{-1} \cap R \subset \mathrm{id}_A$ (tj. pokud $(a, b) \in R$ a zároveň $(b, a) \in R$, pak $a = b$),
- **tranzitivní**, pokud $R \circ R \subset R$, tj. pokud z $(a, b) \in R$ a $(b, c) \in R$ vyplývá i $(a, c) \in R$.

Relace se nazývá **ekvivalence**, pokud je současně reflexivní, symetrická i tranzitivní. Relace se nazývá **uspořádání** jestliže je reflexivní, tranzitivní a antisymetrická.

Plán přednášky

Připomeňme rekurentní definici přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, kde

$$0 = \emptyset, \quad n + 1 = \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Definujeme relaci $m < n$ právě, když $m \in n$. Evidentně jde o úplné uspořádání. Např. $2 \leq 4$, protože

$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} = 4.$$

Jinak řečeno, samotná rekurentní definice zadává vztah $n \leq n + 1$ a tranzitivně pak $n \leq k$ pro všechna k, která jsou tímto postupem definována později.

Plán přednášky

Každá ekvivalence R na množině A zadává zároveň **rozklad** množiny A na podmnožiny vzájemně ekvivalentních prvků, tzv. **třídy ekvivalance**. Klademe pro libovolné $a \in A$

$$R_a = \{b \in A; (a, b) \in A\}.$$

Často budeme psát pro R_a prostě $[a]$, je-li z kontextu zřejmé, o kterou ekvivalenci jde.

Každá ekvivalence R na množině A zadává zároveň **rozklad** množiny A na podmnožiny vzájemně ekvivalentních prvků, tzv. **třídy ekvivalance**. Klademe pro libovolné $a \in A$

$$R_a = \{b \in A; (a, b) \in A\}.$$

Často budeme psát pro R_a prostě $[a]$, je-li z kontextu zřejmé, o kterou ekvivalenci jde.
Zjevně $R_a = R_b$ právě, když $(a, b) \in R$ a každá taková podmnožina je tedy reprezentována kterýmkoliv svým prvkem, tzv. **reprezentantem**. Zároveň $R_a \cap R_b \neq \emptyset$ právě, když $R_a = R_b$, tj. třídy ekvivalence jsou po dvou disjunktní. Konečně, $A = \cup_{a \in A} R_a$, tj. celá množina A se suktečně rozloží na jednotlivé třídy.
Můžeme také třídám rozkladu rozumět tak, že třídu $[a]$ vnímáme jako prvek a „až na ekvivalenci“.

Plán přednášky

Příklad – konstrukce celých čísel

Na přirozených číslech umíme sice sčítat a víme, že přičtením nuly se číslo nezmění. Umíme i definovat odečítání, při něm ale jen někdy existuje výsledek.

Příklad – konstrukce celých čísel

Na přirozených číslech umíme sice sčítat a víme, že přičtením nuly se číslo nezmění. Umíme i definovat odečítání, při něm ale jen někdy existuje výsledek.
Základní ideou konstrukce celých čísel z přirozených je tedy přidat k nim chybějící rozdíly. To můžeme udělat tak, že místo výsledku odečítání budeme pracovat s uspořádanými dvojicemi čísel, které nám samozřejmě vždy výsledek dobře reprezentují. Zbývá jen dobře definovat, kdy jsou (z hlediska výsledku odečítání) takové dvojice ekvivalentní. Potřebný vztah tedy je:

$$(a, b) \sim (a', b') \iff a - b = a' - b' \iff a + b' = a' + b.$$

Všimněme si, že zatímco výrazy v prostřední rovnosti v přirozených číslech neumíme, výrazy v pravo už ano. Snadno ověříme, že skutečně jde o ekvivalenci a její třídy označíme jako celá čísla $\mathbb{Z}$.

Na třídách ekvivalence definujeme operaci sčítání (a s ní i odečítání) pomocí reprezentantů. Např.

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)],$$

což zjevně nezávisí na výběru reprezentantů. Lze si přitom vždy volit reprezentanty $(a, 0)$ pro kladná čísla a reprezentanty $(0, a)$ pro čísla záporná, se kterými se nám bude patrně počítat nejlépe.

Na třídách ekvivalence definujeme operaci sčítání (a s ní i odečítání) pomocí reprezentantů. Např.

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(a+c, b+d)],$$

což zjevně nezávisí na výběru reprezentantů. Lze si přitom vždy volit reprezentanty $(a,0)$ pro kladná čísla a reprezentanty $(0,a)$ pro čísla záporná, se kterými se nám bude patrně počítat nejlépe. Tento jednoduchý přklad ukazuje, jak důležité je umět nahlížet na třídy ekvivalence jako na celistvý objekt a soustředit se na vlastnosti těchto objektů, nikoliv formální popisy jejich konstrukcí. Ty jsou však důležité k ověření, že takové objekty vůbec existují.

U celých čísel nám už platí všechny vlastnosti skalárů (KG1)–(KG4) a (O1)-(O4), z popisu vlastností skalárů. Pro násobení je neutrálním prvkem jednička, ale pro všechna čísla a různá od nuly a jedničky neumíme najít číslo a^{-1} s vlastností $a \cdot a^{-1} = 1$, tzn. chybí nám inverzní prvky. Zároveň si povšimněte, že platí vlastnost oboru integrity (OI), tzn. je-li součin dvou čísel nulový, musí být alespoň jedno z nich nula.

U celých čísel nám už platí všechny vlastnosti skalárů (KG1)–(KG4) a (O1)-(O4), z popisu vlastností skalárů. Pro násobení je neutrálním prvkem jednička, ale pro všechna čísla a různá od nuly a jedničky neumíme najít číslo a^{-1} s vlastností $a \cdot a^{-1} = 1$, tzn. chybí nám inverzní prvky. Zároveň si povšimněte, že platí vlastnost oboru integrity (OI), tzn. je-li součin dvou čísel nulový, musí být alespoň jedno z nich nula.
Díky poslední jmenované vlastnosti můžeme zkonstruovat racionální čísla $\mathbb{Q}$ přidáním všech chybějících inverzí zcela obdobným způsobem, jak jsme konstruovali $\mathbb{Z}$ z $\mathbb{N}$.

Příklad – konstrukce racionálních čísel

Na množině uspořádáných dvojic (p,q), $q \neq 0$, celých čísel definujeme relaci $\sim$ tak, jak očekáváme, že se mají chovat podíly p/q:

$$(p,q) \sim (p',q') \quad \Longleftrightarrow \quad p/q = p'/q' \quad \Longleftrightarrow \quad p \cdot q' = p' \cdot q.$$

Příklad – konstrukce racionálních čísel

Na množině uspořádáných dvojic (p, q), $q \neq 0$, celých čísel definujeme relaci $\sim$ tak, jak očekáváme, že se mají chovat podíly p/q:

$$(p, q) \sim (p', q') \iff p/q = p'/q' \iff p \cdot q' = p' \cdot q.$$

Opět neumíme očekávané chování v prostřední rovnosti v množině $\mathbb{Z}$ formulovat, nicméně rovnost na pravé straně ano. Zjevně jde o dobře definovanou relaci ekvivalence (ověřte podrobnosti!) a racionální čísla jsou pak její třídy ekvivalence. Když budeme formálně psát p/q místo dvojic (p, q), budeme definovat operace násobení a sčítání právě pomocí formulí, které nám jsou jistě dobře známy.

Přímky v rovině

Vybereme-li v prostoru $\mathbb{R}^2$ směr $v = (a, b)$, pak máme dobře definovánu relaci $P \sim Q$, právě když $P = Q + kv$.
Jde o ekvivalenci a třídy rozkladu jsou právě rovnoběžné prímky se směrovým vektorem v.