Drsná matematika I – 9. přednáška
Aplikace: lineární diferenční rovnice, lineární iterované procesy, diskrétní Markovovy řetězce

Jan Slovák

Masarykova univerzita

11–15. 11. 2019

Obsah přednášky

Jednoduché lineární procesy jsou dány lineárními zobrazeními $\varphi : V \to W$ na vektorových prostorech.

- vektor $v \in V$ představuje stav nějakého námi sledovaného jevu (třeba počty občanů tříděných dle nejvyšší dosažené kvalifikace, stav zásob jednotlivých dílů a výrobků atd.)
- $\varphi(v)$ může představovat výsledek provedené operace (výsledek vzdělávací činnosti školské soustavy nebo výroba a prodej za určité časové období apod.).

Pokud chceme dosáhnout předem daného výsledku $b \in W$ takového jednorázového procesu, řešíme problém

$$\varphi(x) = b$$

pro neznámý vektor x.

V pevně zvolených souřadnicích pak máme matici A zobrazení φ a souřadné vyjádření vektoru b:

$$A \cdot x = b$$

Pro $b = 0$ je množina řešení vektorovým podprostorem (jádro φ). Snadno ověříme základní popis všech řešení:

Theorem (Homogenní soustava rovnic)

Pokud je dimenze $V = n < \infty$ a dimenze obrazu zobrazení φ je k, pak dimenze podprostoru všech řešení je právě $n - k$.

Skutečně:

- sloupce matice zobrazení jsou právě obrazy bázových vektorů, v matici systému je právě k lineárně nezávislých sloupců a tedy i stejný počet lineárně nezávislých řádků;
- při převodu na řádkový schodovitý tvar zůstane nakonec právě $n - k$ nulových řádků;
- při řešení systému rovnic tak zůstane právě $n - k$ volných parametrů a dosazením vždy jednoho z nich hodnotou jedna a vynulováním ostatních získáme právě k lineárně nezávislých řešení.

Fundamentální systém řešení

Každé takové k–tici lineárně nezávislých řešení říkáme **fundamentální systém řešení** daného homogenního systému lineárních rovnic.

Uvažme nyní obecný systém rovnic

$$A \cdot x = b.$$

Jestliže rozšíříme matici A o sloupec b, můžeme, ale nemusíme, také zvětšit počet lineárně nezávislých sloupců a tedy i řádků. Pokud se tento počet zvětší, pak systém rovnic nemůže mít řešení (prostě se naše φ vůbec do b nestrefí). Jestliže ale naopak máme stejný počet nezávislých řádků, znamená to, že sloupec b musí být lineární kombinací sloupců matice A. Koeficienty takové kombinace jsou právě řešení.
Mějme tedy dvě pevně zvolená řešení x a y našeho systému a nějaké řešení z systému homogenního se stejnou maticí. Pak zjevně

$$A \cdot (x - y) = b - b = 0$$
$$A \cdot (x + z) = 0 + b = b.$$

Můžeme proto shrnout:

Theorem (Struktura všech řešení systému lineárních rovnic)

- *podprostor všech řešení homogenního systému rovnic* $A \cdot x = 0$ *má dimenzi* $n - k$, *kde* n *je počet proměnných a* k *je počet lineárně nezávislých rovnic,*
- *všechna řešení jsou generována tzv. fundamentálním systémem* $n - k$ *řešení, který lze obdržet z Gausovy eliminace postupným dosazováním nul a jedniček za volné parametry,*
- *řešení nehomogenního systému existuje právě, když přidáním sloupce* b *k matici* A *nezvýšíme počet lineárně nezávislých řádků. V takovém případě je prostor všech řešení dán součty jednoho pevně zvoleného* ***partikulárního řešení*** *systému a všech řešení systému homogenního se stejnou maticí.*

Diferenčními rovnicemi jsme se zabývali již v první kapitole. Nyní si uvedeme náznak obecné teorie.

Definition

Homogenní lineární diferenční rovnice řádu k s konstantními koeficienty je dána výrazem

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad a_k \neq 0.$$

Říkáme také, že řešíme **homogenní lineární rekurenci** řádu k.

Libovolným zadáním k po sobě jdoucích hodnot x_i jsou určeny i všechny následující hodnoty jednoznačně. Zároveň je zjevné, že součet dvou řešení nebo skalární násobek řešení je opět řešení. Opět tedy je množina řešení vektorovým prostorem. Uvědomme si, že vektory jsou sice nekonečné posloupnosti čísel, samotný prostor všech řešení ovšem bude konečněrozměrný a předem víme, že jeho dimenze bude rovna řádu rovnice k.

Pokud tedy budeme předpokládat řešení v nějaké vhodné formě a podaří se nám najít k lineárně nezávislých možností, budeme mít opět **fundamentální systém řešení** a všechna ostatní budou jejich lineárními kombinacemi.

Uvažujme možnost $x_n = \lambda^n$ pro nějaký skalár λ. Pak dostáváme podmínku

$$\lambda^{n-k}(a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} \cdots + a_k) = 0$$

což znamená, že buď $\lambda = 0$ nebo je λ kořenem tzv. **charakteristického polynomu** v závorce. Předpokládejme, že má tento polynom k různých kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Můžeme za tímto účelem i rozšířit uvažované pole skalárů, např. $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$, protože výsledkem výpočtu pak stejně budou i všechna řešení, která opět zůstanou v původním poli díky samotné rovnici.

Každý z kořenů nám dává jedno možné řešení

$$x_n = (\lambda_i)^n.$$

Abychom byli hotovi, potřebujeme k lineárně nezávislých řešení. Nezávislost ověříme dosazením k hodnot pro $n = 0, \dots, k-1$ pro k možností λ_i. Dostaneme tzv. Vandermondovu matici a je pěkným (ale ne úplně snadným) cvičením spočíst, že pro všechna k a jakékoliv k–tice různých λ_i je determinant takovéto matice nenulový. To ale znamená, že zvolená řešení jsou lineárně nezávislá. Zbývá možnost násobných kořenů λ. Dosaďme pro takové λ do definiční rovnice předpokládané řešení $x_n = n\lambda^n$. Dostáváme podmínku

$$a_0 n\lambda^n + \dots a_k(n-k)\lambda^{n-k} = 0.$$

Tuto podmínku je možné přepsat pomocí tzv. derivace polynomu, kterou značíme apostrofem:

$$\lambda(a_0\lambda^n + \dots + a_k\lambda^{n-k})' = 0$$

a časem uvidíme, že kořen polynomu f je vícenásobný právě, když je kořenem i jeho derivace f'. Naše podmínka je tedy opět splněna.

Při násobnosti ℓ kořenu charakteristického polynomu λ dojdeme obdobně k řešením $x_n = n^j \lambda^n$ pro $j = 0, \dots, \ell - 1$. Tato budou opět tvořit lineárně nezávislý systém, tj. fundamentální řešení. Úplně obdobně jako u systémů lineárních rovnic můžeme dostat všechna řešení nehomogenních rovnic tak, že najdeme jedno řešení a přičteme celý vektorový prostor dimenze k řešení odpovídajících systémů homogenních. Za tímto účelem zpravidla hledáme řešení ve tvaru polynomu

$$x_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_{k-1} n^{k-1}$$

s neznámými koeficienty α_i, $i = 1, \dots, k - 1$. Dosazením do diferenční rovnice dostatneme systém k rovnic pro k proměnných α_i.

Vlastnosti řešení

- prostor všech řešení homogenního systému řádu k je vektorový prostor dimenze k,
- všechna řešení jsou generována fundamentálním systémem k řešení, který lze obdržet získat z kořenů charakteristického polynomu (λ_i^n, pokud jsou kořeny po dvou různé, složitěji v případě násobných kořenů),
- všechna řešení nehomogenního systému obdržíme, když přičteme jedno pevně zvolené partikulární řešení systému ke všem řešením systému homogenního se stejnými koeficienty. Partikulární řešení můžeme hledat pomocí tzv. metody neurčitých koeficientů, tj. hledáme jej jako polynom s neznámými koeficienty a řešíme systém lineárních rovnic.
- řešení vyhovující daným počátečním podmínkám $x_0 = b_0, \dots,$ $x_{k-1} = b_{k-1}$ hledáme z obecného řešení dosazením podmínek a určením koeficientů lineání kombinace funadamentálních řešení. Opět systém lineárních rovnic.

Všimněme si, že pro rovnice s reálnými koeficienty musí vždy kořeny charakterstického polynomu být buď reálné nebo musí vystupovat po dvou komplexně združené nereálné kořeny. Jejich lineárními kombinacemi (součet a rozdíl goniometrických tvarů mocnin) lze pak přímo obdržet reálná řešení vyjádřená pomocí funkcí $\cos(n\varphi)$ a $\sin(n\varphi)$.

Example

Najděte posloupnost, která vyhovuje nehomogenní diferenční rovnici s počátečními podmínkami:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + 1, \quad x_1 = 2, x_2 = 2.$$

Obecné řešení zhomogenizované rovnice je tvaru $a(-1)^n + b2^n$.
Partikulárním řešením je konstanta $-1/2$.
Obecné řešení dané nehomogenní rovnice bez počátečních podmínek je tedy

$$a(-1)^n + b2^n - \frac{1}{2}.$$

Dosazením do počátečních podmínek zjistíme konstanty $a = -5/6$, $b = 5/6$. Dané rovnici s počátečními podmínkami tedy vyhovuje posloupnost

$$-\frac{5}{6}(-1)^n + \frac{5}{3}2^{n-1} - \frac{1}{2}.$$

filtry

Uvažujme nyní nekonečné posloupnosti

$$x = \dots, x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

a operaci T, která zobrazí posloupnost x na posloupnost $z = Tx$ se členy

$$z_n = a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k+1}.$$

Protože nekonečné posloupnosti x umíme sčítat i násobit skaláry po složkách, jedná se opět o příklad vektorového prostoru. Zjevně má dimenzi nekonečnou.

Posloupnosti lze chápat jako diskrétní hodnoty nějakého signálu, odečítané zpravidla ve velmi krátkých časových jednotkách, operace T je pak filtrem, který signál zpracovává. Z definice je zřejmé, že periodické posloupnosti x_n splňující pro nějaké pevné přirozené číslo p

$$x_{n+p} = x_n$$

budou mít i periodické obrazy $z = Tx$

$$\begin{aligned} z_{n+p} &= a_1 x_{n+p} + a_2 x_{n-1+p} + \cdots + a_k x_{n-k+1+p} \\ &= a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k+1} = z_n \end{aligned}$$

se stejnou periodou p.

Pro pevně zvolenou operaci T nás bude zajímat, které vstupní posloupnosti zůstanou přibližně stejné (případně až na násobek) a které budou utlumeny na nulové hodnoty.
Jde nám tedy o vyčíslení jádra našeho lineárního zobrazení T. To je dáno homogenní diferenční rovnicí

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad a_k \neq 0.$$

Špatný equalizer

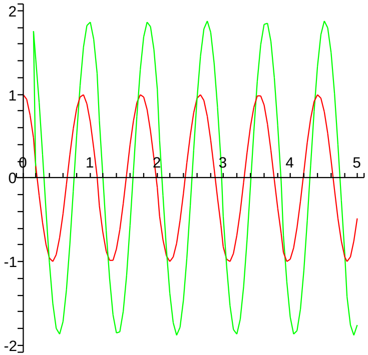
Jako příklad uvažujme lineární filtr zadaný rovnicí

$$z_n = (Tx)_n = x_{n+2} + x_n.$$

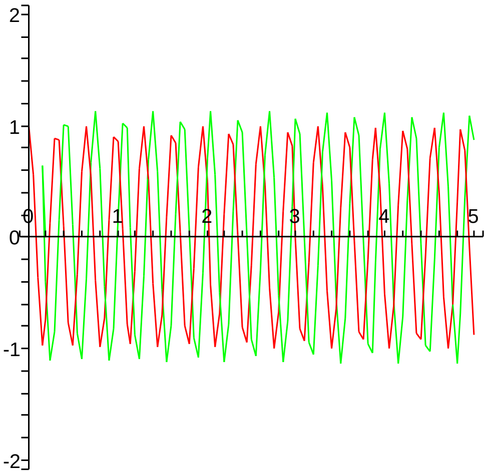
Výsledky takového zpracování signálu jsou naznačeny na následujících čtyřech obrázcích pro postupně se zvyšující frekvenci periodického signálu $x_n = \cos(\varphi n)$.

Červený je původní signál, zelený je výsledek po zpracování filtrem. Nerovnoměrnosti křivek jsou důsledkem nepřesného kreslení, oba signály jsou samozřejmě rovnoměrnými sinusovkami.

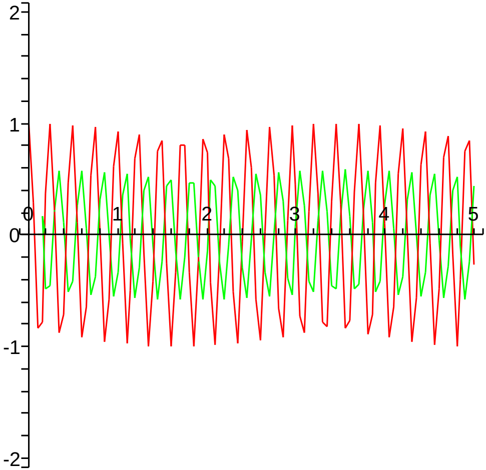
A = 7.1250

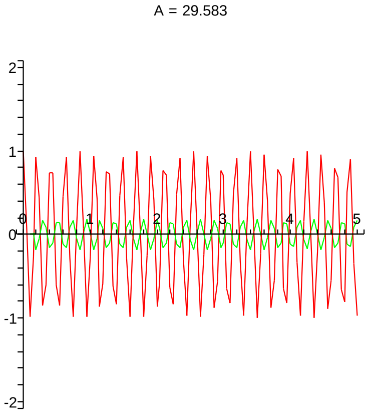


A = 19.375



A = 25.500





Všimněme si, že v oblastech, kde je výsledný signál přibližně stejně silný jako původní, dochází k dramatickému posuvu fáze signálu. Levné equalizery skutečně podobně špatně fungují.
Výsledek lze samozřejmě podrobně spočítat výše uvedenou metodikou.

Iterované procesy

Procesy bývají popsány prostřednictvím lineární operace pro jednotlivá časová období (linearizovaný model). Budeme chtít studovat jeho chování během delší doby.

Example

Představme si, že zkoumáme nějaký systém jednotlivců (pěstovaná zvířata, hmyz, buněčné kultury apod) rozdělený do m skupin (třeba podle stáří, fází vývoje hmyzu apod.).

- Stav x_n je tedy dán vektorem $(a_1, \dots, a_m)$ závisejícím na okamžiku t_n, ve kterém systém pozorujeme.
- Lineární model vývoje takového systému je dán maticí A dimenze n, která zadává změnu vektoru x_n na

$$x_{n+1} = A \cdot x_n$$

  při přírůstku času z t_k na t_{k+1}.

Příkladem lineárních procesů je *Leslieho model růstu* s maticí (pro $m = 5$)

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \tau_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_4 & 0 \end{pmatrix},$$

ve které:

- f_i označuje relativní plodnost příslušné věkové skupiny (ve sledovaném časovém skoku vznikne z N jedinců v i–té skupině $f_i N$ jedinců nových, tj. ve skupině první);
- τ_i je relativní úmrtnost i-té skupiny během jednoho období.

Všechny koeficienty jsou tedy nezáporná reálná čísla a τ jsou mezi nulou a jedničkou. Přímým výpočtem (využitím Laplaceova rozvoje) spočteme charakteristický polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^5 - a\lambda^4 - b\lambda^3 - c\lambda^2 - d\lambda - e$$

s vesměs nezápornými koeficienty a, b, c, d, e, např. $e = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4 f_5$. Je tedy

$$p(\lambda) = \lambda^5(1 - q(\lambda))$$

kde q je ostře klesající a nezáporná funkce pro $\lambda > 0$. Evidentně bude proto existovat právě jedno kladné λ, pro které bude $q(\lambda) = 1$ a tedy $p(\lambda) = 0$. Jinými slovy, **pro každou Leslieho matici existuje právě jedno kladné vlastní číslo λ_0.**

Pro konkrétní koeficienty může být dominantní vlastní číslo λ_0 vetší než jedna, zatímco absolutní hodnoty ostatních vlastních čísel λ_i budou ostře menší než jedna. Iterace dávají pro každý vektor $v = v_0 + v_1 +$ rozložený na vlastní vektory matice (pomíjíme teď složitější možnost různých algebraických a geometrických násobností jednotlivých vlastních čísel)

$$\varphi^k(v) = \lambda_0^k v_0 + \lambda_1^k v_1 + \dots .$$

V takovém případě při iteraci kroků našeho procesu dojde při libovolné počáteční hodnotě x_0 k postupnému vymizení všech komponent v jednotlivých vlastních podprostorech kromě v_0. Poměrné proporce rozložení populace do věkových skupin se budou blížit poměrům komponent vlastního vektoru k dominantnímu vlastnímu číslu.

Například pro matici (uvědomme si význam jednotlivých koeficientů)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

vyjdou vlastní hodnoty přibližně

$$1.03,\ 0,\ -0.5,\ -0,27 + 0.74i,\ -0.27 - 0.74i$$

s velikostmi 1.03, 0, 0.5, 0.78, 0.78 a vlastní vektor příslušný dominantnímu vlastnímu číslu je přibližně

$$x = (30\ 27\ 21\ 14\ 8).$$

Zvolili jsme rovnou jediný vlastní vektor se součtem souřadnic rovným 100, zadává nám proto přímo výsledné procentní rozložení populace.

Častý případ lineárních procesů je popis systému, který se může nacházet v m různých stavech s různou pravděpodobností. V jistém okamžiku je ve stavu s pravděpodobností a_i pro stav i a k přechodu z možného stavu i do stavu j dojde s pravděpodobností t_{ij}.

Popis procesu:

V čase n je systém popsán pravděpodobnostním vektorem $x_n = (a_1, \dots, a_m)$. Tj. komponenty vektoru x jsou reálná nezáporná čísla a jejich součet je roven jedné. Komponenty udávají rozdělení pravděpodobnosti jednotlivých možností stavů systému. Rozdělení pravděpodobností pro čas $n+1$ je dáno vynásobením pravděpodobnostní maticí přechodu $T = (t_{ij})$, tj.

$$x_{n+1} = T \cdot x_n.$$

Protože vektor x zachycuje všechny možné stavy, budou všechny sloupce matice T tvořeny také pravděpodobnostními vektory.

Takovému procesu říkáme **Markovův proces**.
Každý pravděpodobnostní vektor x je opět zobrazen na vektor se součtem souřadnic jedna:

$$\sum_{i,j} t_{ij} x_j = \sum_j (\sum_i t_{ij}) x_j = \sum_j x_j = 1.$$

Protože je součet řádků matice T vždy roven vektoru $(1, \dots, 1)$, bude jednička zaručeně vlastním číslem matice T a k ní musí existovat vlastní vektor x_0.

Theorem (Perronova–Frobeniova věta)

Nechť A je reálná čtvercová matice dimenze m s kladnými prvky. Pak platí

1. *exituje reálné vlastní číslo λ_m matice A takové, že pro všchna ostatní vlastní čísla λ platí $|\lambda| < \lambda_m$,*
2. *vlastní číslo λ_m má algebraickou násobnost jedna,*
3. *vlastní podprostor odpovídající λ_m obsahuje vektor se všemi souřadnicemi kladnými*
4. *platí odhad $\min_i \sum_j a_{ij} \le \lambda_m \le \max_i \sum_j a_{ij}$.*

Tvrzení bezezbytku platí i pro tzv. regulární matice, tj. takové, jejichž nějaká mocnina má výhradně kladné prvky.

Důsledkem této věty pro Markovovy procesy s maticí, která nemá žádné nulové prvky (nebo jejíž některá mocnina má tuto vlastnost), je

- existence vlastního vektoru x_∞ pro vlastní číslo 1, který je pravděpodobnostní
- přibližování hodnoty iterací $T^k x_0$ k vektoru x_∞ pro jakýkoliv pravděpodobnostní vektor x_0.

První tvrzení vyplývá přímo z kladnosti souřadnic vlastního vektoru zmíněné v Perronově–Frobeniově větě, druhé pak z toho, že absolutní hodnoty všech ostatních vlastních čísel musí být ostře menší než jedna.

Sledovanost televizí

Vysílají jisté dvě televizní stanice. Z veřejného výzkumu vyplynulo, že po jednom roce přejde 1/6 diváků první stanice ke druhé stanici, 1/5 diváků druhé stanice přejde k první stanici. Popište časový vývoj počtu diváků sledujících dané stanice jako Markovův proces.

Maticí Markovova procesu je zjevně

$$T = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Matice má dominantní vlastní hodnotu 1, příslušný vlastní vektor je $(\frac{6}{5}, 1)$. Protože je vlastní hodnota dominantní, tak se poměr diváků se ustálí na poměru $6 : 5$.

Ruleta

Hráč rulety má následující strategii: přišel hrát se 100 Kč. Vždy všechno, co aktuálně má. Sází vždy na černou (v ruletě je 37 čísel, z toho je 18 černých, 18 červených a nula). Hráč skončí, pokud nic nemá, nebo pokud získá 800 Uvažte tuto úlohu jako Markovův proces a napište jeho matici.

Jednotlivé stavy systému jsou dány aktuální hodnotou, kterou hráč má. Jsou to tedy částky 0, 100, 200, 400 a 800 Kč. Sloupce příslušné matice jsou obrazem situace, kdy hráč je s pravděpodobností jedna v odpovídajícím stavu (tj. standardních vektorů báze $\mathbb{R}^5$).

Výsledná matice je:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \end{pmatrix},$$

kde $a = \frac{19}{37}$ a $b = \frac{18}{37}$.
Všimněte si podobnosti s Leslieho růstovým modelem.