Matematika I – 2
Kombinatorika a pravděpodobnost

Jan Slovák

Masarykova univerzita

19. 9. 2019

Obsah přednášky

1. Kombinatorické vzorce
   - Permutace, kombinace a variace
   - Permutace, kombinace a variace s opakováním
2. Pravděpodobnost
3. Nezávislé jevy

Plán přednášky

1. Kombinatorické vzorce
   - Permutace, kombinace a variace
   - Permutace, kombinace a variace s opakováním
2. Pravděpodobnost
3. Nezávislé jevy

Permutace

Z množiny n předmětů vytváříme pořadí jejich prvků.
Pro volbu prvního prvku je n možností, další je volen z $n-1$ možností atd., až nám nakonec zbude jediný poslední prvek.

Permutace

Z množiny n předmětů vytváříme pořadí jejich prvků.
Pro volbu prvního prvku je n možností, další je volen z $n-1$ možností atd., až nám nakonec zbude jediný poslední prvek.
Proto je na dané konečné množině S s n prvky právě $n!$ různých pořadí. Hovoříme o **permutacích** prvků množiny S.

Permutace

Z množiny n předmětů vytváříme pořadí jejich prvků.
Pro volbu prvního prvku je n možností, další je volen z $n-1$ možností atd., až nám nakonec zbude jediný poslední prvek.
Proto je na dané konečné množině S s n prvky právě $n!$ různých pořadí. Hovoříme o **permutacích** prvků množiny S.
Jestliže si předem prvky v S očíslujeme, tj. ztotožníme si S s množinou $S = \{1, \dots, n\}$ n přirozených čísel, pak permutace odpovídají možným pořadím čísel od jedné do n.

Permutace

Z množiny n předmětů vytváříme pořadí jejich prvků.
Pro volbu prvního prvku je n možností, další je volen z $n-1$ možností atd., až nám nakonec zbude jediný poslední prvek.
Proto je na dané konečné množině S s n prvky právě $n!$ různých pořadí. Hovoříme o **permutacích** prvků množiny S.
Jestliže si předem prvky v S očíslujeme, tj. ztotožníme si S s množinou $S = \{1, \dots, n\}$ n přirozených čísel, pak permutace odpovídají možným pořadím čísel od jedné do n.
Dokázali jsme tak:
Počet různých pořadí na konečné množině s n prvky je dán funkcí faktoriál:

$$f(n) = n!$$

Kombinace

Pro počet **kombinací k-tého stupně** z n prvků platí (samozřejmě je $k \leq n$)

$$c(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Číslům $c(n,k)$ říkáme **binomická čísla**.

Pokud nám ale záleží i na pořadí vybrané k-tice prvků, hovoříme o **variaci k-tého stupně**.
Pro počet variací platí

$$v(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

pro všechny $0 \leq k \leq n$ (a nula jinak).

Pořadí n prvků, z nichž mezi některými nerozlišujeme, nazýváme **permutace s opakováním**. Nechť je mezi n danými prvky p_1 prvků prvního druhu, p_2 prvků druhého druhu, $\ldots$, p_k prvků k-tého druhu, $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$, potom počet pořadí těchto prvků s opakováním budeme značit $P(p_1, \ldots, p_k)$. Zřejmě platí:

$$P(p_1, \ldots, p_k) = \frac{n!}{p_1! \cdots p_k!}.$$

Volný výběr prvků z n možností, včetně pořadí, nazýváme **variace** k**-tého stupně s opakováním**, jejich počet budeme značit $V(n,k)$. Předpokládáme, že stále máme pro výběr stejně možností, např. díky tomu, že vybrané prvky před dalším výběrem vracíme nebo třeba házíme pořád stejnou kostkou. Zřejmě platí:

$$V(n,k) = n^k.$$

Pokud nás výběr zajímá bez zohlednění pořadí, hovoříme o **kombinacích s opakováním** a pro jejich počet píšeme $C(n, k)$.

Theorem

Počet kombinací s opakováním k-té třídy z n prvků je pro všechny $0 \leq k$ a $0 < n$

$$C(n, k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Plán přednášky

1. Kombinatorické vzorce
   - Permutace, kombinace a variace
   - Permutace, kombinace a variace s opakováním
2. Pravděpodobnost
3. Nezávislé jevy

V matematice pracujeme s abstraktním matematickým popisem pravděpodobnosti. To, do jaké míry je takový popis adekvátní pro konkrétní pokusy či jiný problém, je záležitostí mimo samotnou matematiku (ta ale umí pomoci).

V matematice pracujeme s abstraktním matematickým popisem pravděpodobnosti. To, do jaké míry je takový popis adekvátní pro konkrétní pokusy či jiný problém, je záležitostí mimo samotnou matematiku (ta ale umí pomoci).
Jde o teorii umožňující posoudit, do jaké míry lze očekávat, že vybraný model je ve shodě s realitou. K jejímu studiu bude již potřebný dosti rozsáhlý matematický aparát a budete ji mít jako specializovaný předmět později.

Definition (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**.

Definition (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**.
Pro jednoduchost bude pro nás Ω konečná mnoľina s prvky $\omega_1, \ldots, \omega_n$, představujícími jednotlivé **možné výsledky**.

Definition (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**.
Pro jednoduchost bude pro nás Ω konečná mnoľina s prvky $\omega_1, \ldots, \omega_n$, představujícími jednotlivé **možné výsledky**.
Každá podmnožina $A \subset \Omega$ představuje možný **jev**.

Definition (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**.
Pro jednoduchost bude pro nás Ω konečná mnoľina s prvky $\omega_1, \dots, \omega_n$, představujícími jednotlivé **možné výsledky**.
Každá podmnožina $A \subset \Omega$ představuje možný **jev**.
Systém podmnožin $\mathcal{A}$ základního prostoru se nazývá **jevové pole**, jestliže

- $\Omega \in \mathcal{A}$, tj. základní prostor, je jevem,
- je-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak $A \setminus B \in \mathcal{A}$, tj. pro každé dva jevy je jevem i jejich množinový rozdíl,
- jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak $A \cup B \in \mathcal{A}$, tj. pro každé dva jevy je jevem i jejich sjednocení.

Jevové pole je tedy systém podmnožin (konečného) základního prostoru uzavřený na průniky, sjednocení a rozdíly. Jednotlivé množiny $A \in \mathcal{A}$ nazýváme **náhodné jevy** (vzhledem k $\mathcal{A}$).

Jevové pole je tedy systém podmnožin (konečného) základního prostoru uzavřený na průniky, sjednocení a rozdíly. Jednotlivé množiny $A \in \mathcal{A}$ nazýváme **náhodné jevy** (vzhledem k $\mathcal{A}$).

- Komplement $A^c = \Omega \setminus A$ jevu A je jevem, který nazýváme *opačný jev* k jevu A.

Jevové pole je tedy systém podmnožin (konečného) základního prostoru uzavřený na průniky, sjednocení a rozdíly. Jednotlivé množiny $A \in \mathcal{A}$ nazýváme **náhodné jevy** (vzhledem k $\mathcal{A}$).

- Komplement $A^c = \Omega \setminus A$ jevu A je jevem, který nazýváme *opačný jev* k jevu A.
- Průnik dvou jevů opět jevem, protože pro každé dvě podmnožiny A, $B \subset \Omega$ platí
$$A \setminus (\Omega \setminus B) = A \cap B.$$

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných modelů:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných modelů:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných modelů:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i \in I} A_i$, **nastoupení alespoň jednoho z jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i \in I} A_i$,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných modelů:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i \in I} A_i$, **nastoupení alespoň jednoho z jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i \in I} A_i$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou **neslučitelné jevy**, je-li $A \cap B = \emptyset$,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných modelů:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i \in I} A_i$, **nastoupení alespoň jednoho z jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i \in I} A_i$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou **neslučitelné jevy**, je-li $A \cap B = \emptyset$,
- jev A má za **důsledek** jev B, když $A \subset B$,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných modelů:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i \in I} A_i$, **nastoupení alespoň jednoho z jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i \in I} A_i$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou **neslučitelné jevy**, je-li $A \cap B = \emptyset$,
- jev A má za **důsledek** jev B, když $A \subset B$,
- je-li $A \in \mathcal{A}$, pak se jev $B = \Omega \setminus A$ nazývá **opačný jev k jevu** A, píšeme $B = A^c$.

Definition (Pravděpodobnost)

Pravděpodobnostní prostor je jevové pole $\mathcal{A}$ podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována skalární funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, kdykoliv je $A \cap B = \emptyset$ a $A, B \in \mathcal{A}$,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci P nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

Definition (Pravděpodobnost)

Pravděpodobnostní prostor je jevové pole $\mathcal{A}$ podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována skalární funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, kdykoliv je $A \cap B = \emptyset$ a $A, B \in \mathcal{A}$,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci P nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

Důsledky

Pro všechny jevy platí $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Definition (Pravděpodobnost)

Pravděpodobnostní prostor je jevové pole $\mathcal{A}$ podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována skalární funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, kdykoliv je $A \cap B = \emptyset$ a $A, B \in \mathcal{A}$,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci P nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

Důsledky

Pro všechny jevy platí $P(A^c) = 1 - P(A)$.
Additivnost platí pro jakýkoliv konečný počet neslučitelných jevů $A_i \subset \Omega$, $i \in I$, tj.

$$P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i), \text{ kdykoliv je } A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ i, j \in I.$$

Příklad pravděpodobnosti:

Definition (Klasická konečná pravděpodobnost)

Nech» Ω je konečný základní prostor a nechť jevové pole $\mathcal{A}$ je právě systém všech podmnožin v Ω. **Klasická pravděpodobnost** je takový pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s pravděpodobnostní funkcí $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Následující věta je promítnutím tzv. kombinatorického **principu inkluze a exkluze** do naší konečné pravděpodobnosti:

Theorem

Buďte $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ libovolné jevy na základním prostoru Ω s jevovým polem $\mathcal{A}$. Pak platí

$$
\begin{aligned}
P(\cup_{i=1}^{k} A_i) = {} & \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} P(A_i \cap A_j) \\
& + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} \sum_{\ell=j+1}^{k} P(A_i \cap A_j \cap A_\ell) \\
& - \cdots \\
& + (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k).
\end{aligned}
$$

Následující věta je promítnutím tzv. kombinatorického **principu inkluze a exkluze** do naší konečné pravděpodobnosti:

Theorem

Buďte $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ libovolné jevy na základním prostoru Ω s jevovým polem $\mathcal{A}$. Pak platí

$$\begin{aligned}
P(\cup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) &- \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} P(A_i \cap A_j) \\
&+ \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} \sum_{\ell=j+1}^{k} P(A_i \cap A_j \cap A_\ell) \\
&- \cdots \\
&+ (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k).
\end{aligned}$$

Jde o dobrý příklad matematického tvrzení, kde nejtěžší je najít dobrou formulaci a pak se dá říci, že (intuitivně) je tvrzení zřejmé.

Princip inkluze a exkluse

Speciálním případem předchozí věty je situace, kdy všechny konečné podmnoľniny základního prostoru jsou jevy a všechny elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost. Ve formuli z předchozí věty pak všechny pravděpodobnosti dávají právě počet prvků příslušných podmnožin, až na společný faktor $\frac{1}{n}$, kde n je počet prvků základního prostoru. Pak můžeme vyčíst následující tvrzení pro obecnou konečnou množinu M a její podmnožiny $A_1, \dots, A_k$. Budeme psát $|M|$ pro počet prvků množiny M, tj. pro **mohutnost** množiny M.

$$|M \setminus (\cup_{i=1}^{k} A_i)| = |M| + \sum_{j=1}^{k} \left((-1)^i \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le k} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j})| \right).$$

Tomuto tvrzení o množinách se říká **princip inkluze a exkluze**.

Plán přednášky

Definition (Nezávislé jevy)

Uvažme libovolný pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a v něm nějaké jevy $A_1, \dots, A_k$. Řekneme, že tyto jevy jsou **stochasticky nezávislé** (vzhledem k pravděpodobnosti P), jestliže pro libovolné z nich vybrané jevy $A_{i_1}, \dots, A_{i_\ell}$, $1 \leq \ell \leq k$ platí

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_\ell}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_\ell}).$$

Definition (Nezávislé jevy)

Uvažme libovolný pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a v něm nějaké jevy $A_1, \dots, A_k$. Řekneme, že tyto jevy jsou **stochasticky nezávislé** (vzhledem k pravděpodobnosti P), jestliže pro libovolné z nich vybrané jevy $A_{i_1}, \dots, A_{i_\ell}$, $1 \leq \ell \leq k$ platí

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_\ell}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_\ell}).$$

Zjevně je každý podsystém stochasticky nezávislých jevů opět stochasticky nezávislý. Dále si pro dva stochasticky nezávislé jevy A, B spočtěme

$$P(A \cap B^c) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$$

Definition (Nezávislé jevy)

Uvažme libovolný pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a v něm nějaké jevy $A_1, \ldots, A_k$. Řekneme, že tyto jevy jsou **stochasticky nezávislé** (vzhledem k pravděpodobnosti P), jestliže pro libovolné z nich vybrané jevy $A_{i_1}, \ldots, A_{i_\ell}$, $1 \leq \ell \leq k$ platí

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_\ell}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_\ell}).$$

Zjevně je každý podsystém stochasticky nezávislých jevů opět stochasticky nezávislý. Dále si pro dva stochasticky nezávislé jevy A, B spočtěme

$$P(A \cap B^c) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$$

Odtud už snadno dovodíme, že záměnou jednoho nebo více stochasticky nezávislých jevů za jejich opačné jevy obdržíme opět stochasticky nezávislé jevy.

Často se hledá pravděpodobnost, že nastane alespoň jeden ze stochasticky nezávislých jevů, tzn. hledáme $P(A_1 \cup \cdots \cup A_k)$. Můžeme pak použít elementární vlastnosti množinových operací, tzv. de Morganova pravidla,

$$A_1 \cup \cdots \cup A_k = (A_1^c \cap \cdots \cap A_k^c)^c$$

a dostáváme:

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = 1 - P(A_1^c \cap \cdots \cap A_k^c) = 1 - (1 - P(A_1)) \dots (1 - P(A_k)).$$