1. vnitrosemestrální písemka, 2. termín – MIN101 – podzim 2019
8. 11.

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (1.3 bodu) V rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujme body A, B, C, počátek O a přímku p,

$$A = [1, 2], \quad B = [5, 4], \quad C = [8, 4], \quad O = [0, 0] \quad \text{a} \quad p : 9x - 11y - 2 = 0.$$

a) Určete obsah čtyřúhelníku $OABC$

b) Rozhodněte, zda přímka p protíná úsečku AB; je-li tomu tak, určete průsečík.

c) Určete body, ve kterých přímka p protíná souřadné osy.

d) Určete bod D tak, aby $OABD$ byl rovnoběžník.

e) Určete bod D tak, aby trojúhelník ABD byl rovnoramenný, $||\overrightarrow{DA}|| = ||\overrightarrow{DB}||$, a vzdálenost bodů C a D byla rovna 5.

V částech d) a e) určete všechna řešení, existuje-li jich více.

2. (0.9 bodu) Ve sportovním sedmičlenném týmu jsou Adam, Eva a Lenka. Trenér náhodně seřadí všechny děti vedle sebe do řady.

a) S jakou pravděpodobností bude mezi Adamem a Lenkou stát právě jeden člen týmu?

b) S jakou pravděpodobností budou alespoň dva z trojice Adam, Eva a Lenka stát vedle sebe?

c) Pozice v řadě jsou očíslovány čísly jedna až sedm. S jakou pravděpodobností budou Adam, Eva i Lenka na pozicích s lichými čísly?

Poznámka : Výsledek stačí napsat pomocí zlomků a faktoriálů, tj. není třeba ho dále upravovat.

3. (0.8 bodu) Je dána relace ρ na množině M. Ve všech případech rozhodněte, zda je tato relace reflexivní, symetrická či tranzitivní. Je-li to relace ekvivalence, popište třídy rozkladu množiny M podle relace ρ.

a) $M = \mathbb{R}^2$ a

$$(a, b)\rho(c, d) \iff \langle (a, b), (c, d) \rangle > 0.$$

b) $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a

$$z_1 \rho z_2 \iff \frac{z_1^3}{z_2^3} \in \mathbb{R}_+.$$

c) $M = \mathbb{R}^2$ a $(a, b)\rho(c, d)$, jestliže soustava rovnice

$$ax + by = 1, \quad cx + dy = 3$$

nemá řešení.

4. (1 bod) Vysvětlete násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru a Moivreovu větu popisující mocninu komplexního čísla.

5. (1 bod) Vysvětlete, jaká lineární zobrazení roviny $\mathbb{R}^2$ do sebe zachovávají velikosti, a popište pomocí maticového počtu rotaci v rovině kolem bodu $[1, 1]$ o 90 stupňů.

Řešení a bodování

1. a) **[0.3 bodu]** Hledaný obsah S je roven součtu obsahů dvou trojúhelníků,

$$S = |\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{OB}\end{pmatrix}| + |\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{OC}\end{pmatrix}| = \frac{1}{2}|\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}| + \frac{1}{2}|\det\begin{pmatrix}5 & 4\\ 8 & 4\end{pmatrix}| = 3 + 6 = 9,$$

[0.1b za rozdělení, 0.1b za obsah trojúhelníků a 0.1b za správný výsledek].

b) **[0.2 bodu]** Lze spočíst průsečík přímky p a přímky určené body A a B; jednodušší je dosadit souřadnice těchto bodů do rovnice přímky p. Dostaneme $9\cdot 1 - 11\cdot 2 - 2 < 0$ pro bod A a $9\cdot 5 - 11\cdot 4 - 2 < 0$ pro bod B. Tedy oba body leží ve stejné polorovině určené přímkou p, tj. přímka p úsečku AB neprotíná, [0.1b za postup a 0.1b za správný výsledek].

c) **[0.2 bodu]** Rovnice $9 \cdot 0 - 11y - 2 = 0$ znamená $y = -\frac{2}{11}$ a rovnice $9x - 11 \cdot 0 - 2 = 0$ znamená $x = \frac{2}{9}$. Dostali jsme průsečíky $[0, -\frac{2}{11}]$ a $[\frac{2}{9}, 0]$, [0.1b za postup a 0.1b za správný výsledek].

d) **[0.1 bodu]** Bod D je dán vztahem $D = O + \overrightarrow{AB} = [4, 2]$, [0.1b].

e) **[0.5 bodu]** Bod D leží na ose úsečky AB, jejíž střed je $S = [\frac{1+5}{2}, \frac{2+4}{2}] = [3, 3]$, [0.1b]. Směrový vektor n osy je kolmý na $\overrightarrow{AB} = (4, 2)$, vezmeme třeba $n = (1, -2)$; tedy $D = S + tn = [3, 3] + t(1, -2)$, [0.1b]. Dále platí

$$||\overrightarrow{CD}|| = ||[3, 3] + t(1, -2) - [8, 4]|| = ||(-5 + t, -1 - 2t)|| = \sqrt{(t-5)^2 + (2t+1)^2} = 5,$$

[0.1b], což je kvadratická rovnice $5t^2 - 6t + 1 = 0$. Tato rovnice má dvě řešení $t_1 = 1$ a $t_2 = \frac{1}{5}$, Tedy dostáváme dvě řešení

$$D_1 = [3, 3] + (1, -2) = [4, 1] \quad \text{a} \quad D_2 = [3, 3] + \tfrac{1}{5}(1, -2) = [\tfrac{16}{5}, \tfrac{13}{5}],$$

[0.1b+0.1b za dvě správná řešení].

2. a) **[0.2 bodu]** Trojici AXL nebo LXA (X označuje dítě mezi Adamem a Lenkou) je možné umístit pěti způsoby, tedy výsledek je

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 5!}{7!} = \frac{5}{21},$$

[0.1b za postup a 0.1b za správný výsledek].

b) **[0.4 bodu]** Použijeme princip inkluze a exkluze. Uvažujme množinu způsobů $M_{A,E}$ ve kterých Adam a Eva stojí vedle sebe a podobně množiny $M_{A.L}$ a $M_{E,L}$. Tedy potřebujeme určit počet prvků ve sjednocení $M_{A,E} \cup M_{A,L} \cup M_{E,L}$, [0.1b]. Máme $|M_{A,E}| = |M_{A,L}| = |M_{E,L}| = 2 \cdot 6!$, [0.1b]. Dále $M_{A,E} \cap M_{A,L}$ případy, kde Adam stojí mezi Evou a Lenkou, což tvoří trojici „EAL“ nebo „LAE“. Těchto případů je $2 \cdot 5!$, a podobně pro další dva průniky dvou množin, [0.1b]. Jelikož $M_{A,E} \cap M_{A,L} \cap M_{E,L} = \emptyset$, výsledný počet je

$$M_{A,E} \cup M_{A,L} \cup M_{E,L} = 2 \cdot 6! + 2 \cdot 6! + 2 \cdot 6! - 2 \cdot 5! - 2 \cdot 5! - 2 \cdot 5! + 0 = 30 \cdot 5!,$$

tedy hledaná pravděpodobnost je $\frac{30 \cdot 5!}{7!} = \frac{5}{7}$, [0.1b].

c) **[0.3 bodu]** Rozmístit Adama, Evu a Lenku na některé z pozic 1, 3, 5 nebo 7 lze $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ způsoby, [0.1b]. Zbylé 4 děti lze rozmístit libovolně 4! způsoby, [0.1b]. Výsledek tedy je

$$\frac{24 \cdot 4!}{7!} = \frac{4}{35},$$

[0.1b].

3. a) **[0.2 bodu]:** Relace ρ je symetrická a není reflexivní (neboť $(0, 0)\not\rho(0, 0)$), [0.1b]. Dva nenulové vektory jsou v relaci, jestliže svírají ostrý úhel - tedy relace není tranzitivní, [0,1b].

b) **[0.3 bodu]:** Je to relace ekvivalence, [0.1b]. Jestliže komplexní číslo z_i svírá úhel φ_i s reálnou osou, pak číslo $\frac{z_1}{z_2}$ svírá úhel $\varphi_1 - \varphi_2$ a číslo $\frac{z_1^3}{z_2^3}$ svírá úhel $3(\varphi_1 - \varphi_2)$. Tedy $z_1 \rho z_2$, jestliže $3(\varphi_1 - \varphi_2)$ je nulový úhel (až na periodu $2k\pi$), tj. $\varphi_1 - \varphi_2 \in \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$. Tedy třída rozkladu $[z]_\rho$ obsahuje všechna komplexní čísla, která se od čísla z liší o úhel $\frac{2\pi}{3}$ v kladném nebo záporném směru, [0.2b za úvahu].

c) **[0.3b bodu]:** Relace ρ je reflexivni, [0.1b]; není symetrická – např. $(3, 3)\rho(1, 1)$, ale $(1, 1)\not\rho(3, 3)$), [0.1b]; není tranzitivní – $(1, 1)\rho(2, 2)$, $(2, 2)\rho(3, 3)$, ale $(1, 1)\not\rho(3, 3)$, [0.1b].