1. vnitrosemestrální písemka – MIN101 – podzim 2019 – 21. 10.

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (1.4 bodu) V rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujme body A, B, R, počátek O a přímku p,

$$A = [8,3], \quad B = [2,5], \quad R = [9,7], \quad O = [0,0] \quad \text{a} \quad p : [7,-4] + t(2,3).$$

a) Určete obsah trojúhelníku ABO.
b) Nechť q je přímka procházející body A a B. Určete průsečík přímek p a q.
c) Určete body C a D tak, aby AB byla strana čtverce $ABCD$, který celý leží v 1. kvadrantu.
d) Určete bod P na úsečce AB, jehož vzdálenost od bodu R je rovna 5.

V částech c) a d) určete všechna řešení, existuje-li jich více.

2. (0.9 bodu) Skupina osmi spolužáků (čtyři dívky a čtyři chlapci) chce jít do kina, mezi nimi jsou Petr, Honza a Eva. V kině si všichni sednou do stejné řady, ve které je osm sedadel. Do sálu přijdou až za tmy, takže se do této řady rozmístí náhodně. Uvažme následující jevy:

- Jev A: Alespoň jeden z dvojice Petr, Honza sedí na krajním sedadle.
- Jev B: Mezi Petrovými sousedy není Honza.
- Jev C: Petr si sedne vedle Evy.
- Jev D: Žádné dvě dívky nesedí vedle sebe.

Určete pravděpodobnost jevů A, B, C a D. Dále určete pravděpodobnost, že Petr si sedne vedle Evy za předpokladu, že žádné dvě dívky nesedí vedle sebe (což je podmíněná pravděpodobnost $P(C|D)$).

Poznámka : Výsledek stačí napsat pomocí zlomků a faktoriálů, tj. není třeba ho dále upravovat.

3. (0.7 bodu) Je dána relace ρ na množině M. Ve všech případech rozhodněte, zda se jedná o relaci ekvivalence. Je-li tomu tak, popište třídy rozkladu množiny M podle relace ρ.

a) $M = \mathbb{R}^2$ a
$$(a,b)\rho(c,d) \iff \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0.$$

b) $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ a
$$(a,b)\rho(c,d) \iff h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1.$$

c) $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ a
$$(a,b)\rho(c,d) \iff h\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 2.$$

d) $M = \{y = ax+b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a,b) \neq (0,0)\}$ je množina přímek v rovině, které nejsou rovnoběžné s osou y a nesplývají s osou x, a
$$(a,b)\rho(c,d) \iff \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0.$$

Zde $h(\ )$ označuje hodnost matice.

Řešení a bodování

1. a) **[0.2 bodu]** Hledaný obsah S je roven

$$S = |\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB} \end{pmatrix} | = \frac{1}{2}| \det \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} | = \frac{1}{2}|40 - 6| = 17,$$

[0.1b za postup a 0.1b za správný výsledek].

b) **[0.3 bodu]** Potřebujeme řešení soustavy

$$[7, -4] + t(2, 3) = [8, 3] + s(-6, 2),$$

což je $t = 2$ a $s = -\frac{1}{2}$. Průsečík je tedy $[7, -4] + 2(2, 3) = [11, 2]$, [0.2b za postup a 0.1b za správný výsledek].

c) **[0.4 bodu]** Platí $\overrightarrow{AB} = (-6, 2)$, tedy směr kolmý na $\overrightarrow{AB}$ je dán vektorem $n = (2, 6)$, [0.1b], kde $||n|| = ||\overrightarrow{AB}||$. Jelikož AB má být strana čtverce, nutně buď $C = B + n$ a $D = A + n$ nebo $C = B - n$ a $D = A - n$ (rozmyslete si obrázek!), [0.1b]. V prvním případě máme

$$C = [2, 5] + (2, 6) = [4, 11] \quad \text{a} \quad D = [8, 3] + (2, 6) = [10, 9],$$

a tedy všechny body A, B, C i D leží v 1. kvadrantu, [0.1b]. V druhém případě máme $D = [8, 3] - (2, 6) = [6, -3]$, tj. bod D by se ocitl mimo 1. kvadrant, [0.1b]. Existuje tedy jediné řešení.

d) **[0.5 bodu]** Bod P je tvaru $P = [8, 3] + r(-6, 2)$, kde $0 \leq r \leq 1$, [0.1b], přičemž chceme $||\overrightarrow{RP}|| = 5$, [0.1b]. Tedy

$$5 = ||\overrightarrow{RP}|| = ||(-1 - 6r, -4 + 2r)|| = \sqrt{(-1 - 6r)^2 + (-4 + 2r)^2} = \sqrt{40r^2 - 4r + 17}.$$

Toto vede na rovnici $10r^2 - r - 2 = 0$, [0.1b], která má kořeny $\frac{1}{2}$ a $-\frac{2}{5}$, [0.1b]. Pouze jedno řešení tedy vyhovuje podmínce: $0 \leq \frac{1}{2}$, tedy jediným řešením je bod $P = [8, 3] + \frac{1}{2}(-6, 2) = [5, 4]$, [0.1b].

2. Jev A, **[0.2 bodu]:** Pro případ, kdy Petr a Honza sedí na krajních sedadlech, existuje $2(8 - 2)!$ možností. Případů, kde právě jeden z dvojice Honza, Martin je na krajním sedadle, je $4 \cdot 6 \cdot 6!$. Tedy

$$P(A) = \frac{2 \cdot 6! + 4 \cdot 6 \cdot 6!}{8!} = \frac{13}{28}.$$

Jev B, **[0.2 bodu]:** Sedí-li Petr na jednom z krajních sedadel, pak je $6 \cdot 6!$ možností. Sedí-li Petr na některém pevně zvoleném sedadle „uvnitř“, máme $6 \cdot 5 \cdot 5!$. Tedy

$$P(B) = \frac{2 \cdot (6 \cdot 6!) + 6 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 5!)}{8!} = \frac{3}{4}.$$

Jiná úvaha: doplněk B^c jevu B znamená, že Petr a Honza sedí vedle sebe. Tedy $P(B^c) = P(C) = \frac{2 \cdot 7 \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{4}$ (viz úvaha níže).

Jev C, **[0.1 bodu]:** Dvojici Petr + Eva chápeme jako jednu osobu, tedy

$$P(C) = \frac{2 \cdot 7!}{8!} = \frac{1}{4}.$$

Jev D, **[0.1 bodu]:** Máme dvě možnosti pro „střídavé“ rozmístění CDCDCDCD nebo DCDCDCDC, tedy celkem $2 \cdot (4!)^2$ rozesazení. [Už za tuto úvahu je 0.1b]. Dále jsou možné případy, kde je právě jedna dvojice sousedních chlapců, např. DCCDCDCD. Pak jsou nutně dívky na krajních sedadlech a pro umístění dvojice sousedních chlapců máme 3 možností. Celkem tedy

$$P(D) = \frac{(2 + 3) \cdot (4!)^2}{8!} = \frac{1}{14}.$$

P(C|D), **[0.3 bodu]:** Máme $P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}$. Sousední dvojici Petr + Eva lze umístit $2 \cdot 7$ způsoby do „střídavých“ rozesazení a $3 \cdot 6$ způsoby do „nestřídavých“ rozesazení, tj.

$$P(C \cap D) = \frac{(2 \cdot 7 + 3 \cdot 6) \cdot (3!)^2}{8!} \quad \text{a tedy} \quad P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{(2 \cdot 7 + 3 \cdot 6) \cdot (3!)^2}{5 \cdot (4!)^2}.$$

3. a) **[0.1 bodu]:** Relace ρ není tranzitivní: např. $(0,0)\rho(1,1)$ a $(0,0)\rho(1,2)$, ale $(1,1)\not\rho(1,2)$.

b) **[0.2 bodu]:** Relace ρ je ekvivalence, přičemž třída rozkladu určená prvkem (a,b) je

$$[(a,b)]_\rho = \{(ka,kb) \mid k \in \mathbb{R}, k \neq 0\},$$

což lze interpretovat jako přímku v rovině procházející počátkem, ze které počátek odstraníme.

c) **[0.1 bodu]:** Relace ρ není reflexivni: např. $(1,1)\not\rho(1,1)$.

d) **[0.3 bodu]:** Relace ρ je ekvivalence. Třída rozkladu určená prvkem (a,b), tj. přímkou $y = ax+b$, je tvořena přímkami $y = k(ax+b)$, $k \neq 0$; všechny takové přímky se protínaji v bodě $[-\frac{b}{a}, 0]$ pro $a \neq 0$. Tedy třída rozkladu $[ax+b]_\rho$ pro $a \neq 0$ je tvořena přímkami z M procházejícími bodem $[-\frac{b}{a}, 0]$ a třída rozkladu $[ax+b]_\rho$ pro $a = 0$, $b \neq 0$ je tvořena přímkami z M, které jsou rovnoběžné s osou x.