

# Obsah

|   |    |
|---|----|
| Předmluva   | 2  |
| 2 Lineární algebra                                      | 3  |
| 3 Polynomy, racionální lomené funkce a parciální zlomky | 5  |
| 4 Vlastnosti funkce a jednoduché limity                 | 6  |
| 5 Derivace funkce                                       | 8  |
| 6 L'Hospitalovo pravidlo, aplikace derivací             | 10 |
| 7 Průběh funkce   | 12 |
| 8 Neurčitý integrál I                                   | 14 |
| 9 Neurčitý integrál II                                  | 16 |
| 10 Výpočet určitého integrálu                           | 17 |
| 11 Aplikace určitého integrálu                          | 18 |
| 12 Nevlastní integrály a interpolace                    | 19 |
| 13 Nekonečné řady                                       | 21 |

# Předmluva

Tato sbírka slouží jako doplněk knihy Matematika pro nematematické obory (Došlá, Liška), případně skript Matematika pro chemiky I (Došlá). Obsahem jsou příklady, které mohou být použity ve výuce předmětu M1020 Matematika I - seminář, případně při domácí přípravě. Řazení jednotlivých kapitol se řídí orientačním harmonogramem předmětu M1020.

Sbírka rozšiřuje uvedené učebnice o příklady, které se typicky vyskytují na zkoušce z předmětu M1010 Matematika I, případně o další příklady na důležitá témata (derivace, průběh funkce, integrální počet) tak, aby byla další možnost jejich procvičení. Přirozeným doplňkem sbírky je elektronický učební text .

Sbírka byla vytvořena v rámci projektu Matematika pro chemiky podpořeného Fondem rozvoje Masarykovy univerzity.

## Týden 2

# Lineární algebra

1. Uveďte příklad matice  $3 \times 2$ , která má hodnotu 2.
2. Uveďte příklad matice  $3 \times 3$ , která má hodnotu 2.
3. Udejte příklad systému dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, který nemá žádné řešení.
4. Udejte příklad systému dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, který má nekonečně mnoho řešení.
5. Určete inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

6. Gaussovou metodou řešte systém lineárních rovnic (jedno řešení)

a) 
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 2y + z &= 7 \\ 3x - y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

b) 
$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 0 \\ x + 2y &= -1 \\ 3x - y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

c) 
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 5 \\ 3x + y + 2z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

d) 
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 3x - y - z &= 4 \end{aligned}$$

a)  $[\frac{17}{11}, \frac{12}{11}, \frac{19}{11}]$ , b)  $[1 - 1, 0]$ , c)  $[2, -2, -1]$ , d)  $[2, 1, 1]$ .

7. Gaussovou metodou řešte systém lineárních rovnic (nemá řešení)

a) 
$$\begin{aligned} a + 3b - 2c + d &= 0 \\ 2a + 5b - 3c + 3d &= 0 \\ a + 2c - 2d &= 9 \\ 4a + 10b - 6c + 6d &= 1 \end{aligned}$$

b) 
$$\begin{aligned} a - 2b + 3c - d + 2e &= 2 \\ 3a - b + 5c - 3d - e &= 6 \\ 2a + b + 2c - 2d - 3e &= 8 \end{aligned}$$

8. Gaussovou metodou řešte systém lineárních rovnic (nekonečně mnoho řešení)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x - 2y + z = 4 \\ & 2x + 3y - z = 3 \\ & 4x - y + z = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & a + 3b + 5c - 4d = 1 \\ & a + 3b + 2c - 2d + e = -1 \\ & a - 2b + c - d - e = 3 \\ & a - 4b + c + d - e = 3 \\ & a + 2b + c - d + e = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & a + b + c + d = 1 \\ & 2a + 2b + 2c = 0 \\ & a + b + 5c - d + 6e = 1 \\ & a + b - 3c + d - 6e = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & a - 2b + c + d - e = 0 \\ & 2a + b - c - d + e = 0 \\ & a + 7b - 5c - 5d + 5e = 0 \\ & 3a - b - 2c + d - e = 0 \end{aligned}$$

$$\text{a)} \left( \frac{18}{7} - \frac{1}{7}t, \frac{3}{7}t - \frac{5}{7}, t \right), \text{ b)} (-t, -1 - t, 0, -1 - t, 2t), \text{ c)} \left( -\frac{1}{2} - s + \frac{3}{2}t, s, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t, 1, t \right), \text{ d)} (0, 0, 0, t, t).$$

9. Vypočtete determinant matice:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{c)} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{d)} \quad \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{a)} 3, \text{ b)} -34, \text{ c)} 14, \text{ d)} -248.$$

## Týden 3

# Polynomy, racionální lomené funkce a parciální zlomky

1. Vyřešte nerovnici  $(x^3 - x^2)(x - 2) \geq 0$ .

$$x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$$

2. Určete intervaly, kde je funkce  $y = x^2(x - 1)$  kladná, resp. záporná, a načrtněte její graf.

$$\text{kladná pro } x > 1, \text{ záporná pro } x < 1$$

3. Určete všechny reálné kořeny polynomu  $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ .

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 3$$

4. Určete reálné kořeny polynomu  $P(x) = (x^3 - 1)(x - 2)$ . Načrtněte graf tohoto polynomu.

$$x_1 = 1, x_2 = 2$$

5. Napište polynom třetího stupně, který má jednoduché kořeny  $x = -1$ ,  $x = 0$  a  $x = 1$ . Načrtněte graf tohoto polynomu.

$$x(x^2 - 1)$$

6. Napište polynom třetího stupně, který má jednoduchý kořen  $x = 2$  a dvojnásobný kořen  $x = 0$ . Určete, kde je tento polynom kladný a kde záporný. Načrtněte jeho graf.

$$x^2(x - 2)$$

7. Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

a)  $R(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x^3 - x^2}$ ,

b)  $R(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2}$ ,

c)  $R(x) = \frac{2x^2 + 2x + 2}{x(x^2 + 1)}$ ,

d)  $R(x) = \frac{2x - 1}{x(x+1)^2}$ ,

e)  $R(x) = \frac{5x - 14}{(x-1)(x^2 - 4)}$ ,

f)  $R(x) = \frac{3x + 16}{x^2 - x - 6}$ ,

g)  $R(x) = \frac{x^2 - x}{(x+1)^3}$ ,

h)  $R(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{(x^2 + 4)(x + 2)}$ .

a)  $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2}$ , b)  $\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2}$ , c)  $\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2+1}$ , d)  $\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x}$ , e)  $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2}$ , f)  $\frac{5}{x-3} - \frac{2}{x-2}$ ,  
g)  $\frac{1}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3}$ , h)  $\frac{1}{x+2} - \frac{3}{x^2+4}$ .

# Týden 4

## Vlastnosti funkce a jednoduché limity

1. Najděte inverzní funkci k dané funkci (a nakreslete graf)

a)  $y = \ln(x - 2)$ ,

b)  $y = \frac{1}{x+1}$ ,

c)  $y = 10^{x-1}$ ,

d)  $y = e^{-x}$ ,

e)  $y = 3e^x$ ,

f)  $y = 2 \log x$ ,

g)  $y = e^x + 1$ ,

h)  $y = \frac{\operatorname{tg} x}{3}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

a)  $y = e^x + 2$ , b)  $y = \frac{1}{x} - 1$ , c)  $y = \log x + 1$ , d)  $y = -\ln x$ , e)  $y = \ln \frac{x}{3}$ , f)  $y = 10^{\frac{x}{2}}$ , g)  $y = \ln(x - 1)$ ,  
h)  $y = \operatorname{arctg} 3x$

2. Nakreslete graf závislosti pH

$$\text{pH} = -\log[H_3O^+]$$

na koncentraci oxoniových kationtů v dané látce. Co se stane s hodnotou pH, zvýší-li se koncentrace oxoniových kationtů?

3. Nakreslete graf závislosti objemu plynu  $V = \frac{RT}{P}$  na tlaku  $P$ . S rostoucím tlakem objem roste nebo klesá?

4. Množství dané látky  $x$  je v čase  $t$  dáno vztahem

$$x(t) = \frac{2e^t - 2}{e^t - 1}.$$

Pomocí limity určete, kolik bude této látky pro  $t \rightarrow \infty$ .

5. Množství dané látky  $x$  je v čase  $t$  dáno vztahem

$$x(t) = 100 - e^{-2t}.$$

S rostoucím časem bude této látky přibývat nebo ubývat? Kolik jí bude pro  $t \rightarrow \infty$ ?

6. Vypočtěte limity v nevlastním bodě

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4 - x^3 + 2x + 1)$ ,

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 5x + 6)$ ,

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x + 2}{x^3 - x + 1}$ ,

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 5x - 1}{x^3 + 2x + 7}$ ,

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - x^2 + 2}{x^2 + 2x + 7}$ ,

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 4x + 9}{5x^3 - x^2 + 3x}$ .

a)  $\infty$ , b)  $-\infty$ , c) 0, d)  $-\infty$ , e)  $\infty$ , f)  $\frac{1}{5}$ .

7. Vypočtete limity ( $\frac{\text{číslo}}{0}$ ).

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{x-3},$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{(x-2)^2},$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-x}{\ln x},$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4-x}{1-\cos x}.$

a) neexistuje, b)  $\infty$ , c) neexistuje, d)  $\infty$ .

# Týden 5

## Derivace funkce

1. Určete derivaci funkce (základní vzorce a úpravy)

a)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x$ ,

b)  $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 5$ ,

c)  $f(x) = \sin \frac{\pi}{2} + 2e^x + \frac{x}{2}$ ,

d)  $f(x) = e + 3 \cos x - 4$ ,

e)  $f(x) = \ln x - \log x$ ,

f)  $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,

g)  $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{5x^2} + 6\sqrt[5]{x^3}$ ,

h)  $f(x) = x\sqrt{x} - \frac{x^2+1}{x}$ .

a)  $3x^2+6x-5$ , b)  $8x^3-6x^2+1$ , c)  $2e^x+\frac{1}{2}$ , d)  $-3 \sin x$ , e)  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x \ln 10}$ , f)  $\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$ , g)  $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{5x^3} + \frac{18}{5x^{\frac{5}{2}}}$ ,  
h)  $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\sqrt{x}}{2} - 1$

2. Určete derivaci funkce (derivace součinu a podílu)

a)  $f(x) = x^3 \ln x$ ,

b)  $f(x) = \sqrt{x} \cos x$ ,

c)  $f(x) = \ln x \cdot \operatorname{arctg} x$ ,

d)  $f(x) = 3 \cos x \cdot \operatorname{tg} x$ ,

e)  $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 4)$ ,

f)  $f(x) = x^2 e^x \ln x$ ,

g)  $f(x) = \frac{x}{x^2-2}$ ,

h)  $f(x) = \frac{1-x}{x^2+1}$ ,

i)  $f(x) = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$ ,

j)  $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ ,

k)  $f(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x}$ ,

l)  $f(x) = \frac{3-x}{\ln x}$ .

a)  $x^2(3 \ln x + 1)$ , b)  $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \sin x$ , c)  $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \frac{\ln x}{x^2+1}$ , d)  $3 \cos x$ , e)  $e^x(x^2 + 2)$ , f)  $xe^x[(x+2) \ln x + 1]$ ,  
g)  $-\frac{x^2+2}{(x^2-2)^2}$ , h)  $\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$ , i)  $-\frac{2}{x(\ln x+1)^2}$ , j)  $-\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$ , k)  $\frac{1}{1-\sin x}$ , l)  $\frac{x-x \ln x-3}{x \ln^2 x}$



3. Určete derivaci funkce (derivace složené funkce)

a)  $f(x) = (x^2 + 3x)^4,$

b)  $f(x) = \ln(5x + 1),$

c)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1},$

d)  $f(x) = \sin^2 x,$

e)  $f(x) = \ln \sqrt{\cos x},$

f)  $f(x) = \ln^3(x^2 - 1),$

g)  $f(x) = \cos^2(3x + 2),$

h)  $f(x) = \cos(3x + 2)^2,$

i)  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1},$

j)  $f(x) = x \sin 2x,$

k)  $f(x) = \ln^2 \cos^3 x^5,$

l)  $f(x) = \ln \ln(x^2 - 3),$

m)  $f(x) = \frac{1}{\ln(\sin^2 x)},$

n)  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}.$

a)  $4(x^2 + 3x)^3(2x + 3),$  b)  $\frac{5}{5x+1},$  c)  $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$  d)  $2 \sin x \cos x$  e)  $-\frac{\operatorname{tg} x}{2},$  f)  $\frac{6x \ln^2(x^2-1)}{x^2-1},$   
 g)  $-6 \sin(3x + 2) \cos(3x + 2),$  h)  $-6(3x + 2) \sin(3x + 2)^2,$  i)  $-\frac{1}{x^2+1},$  j)  $\sin 2x + 2x \cos 2x,$   
 k)  $-30x^4 \operatorname{tg} x \cdot \ln \cos^3 x^5,$  l)  $\frac{2x}{(x^2-3) \ln(x^2-3)},$  m)  $-\frac{\operatorname{cotg} x}{\ln^2 \sin^2 x},$  n)  $-\frac{1}{\cos x}$

## Týden 6

# L'Hospitalovo pravidlo, aplikace derivací

1. Pomocí L'Hospitalova pravidla vypočtete limity (základní použití)

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1},$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2},$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{x+4}},$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x},$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x},$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x},$

g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln^2 x},$

h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x \ln x}.$

a) 1, b)  $\frac{4}{3}$ , c) -4, d) 2, e)  $\frac{1}{2}$ , f)  $\frac{1}{4}$ , g)  $\infty$ , h) 0.

2. Pomocí L'Hospitalova pravidla vypočtete limity (těžší příklady)

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}},$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}},$

c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \operatorname{tg} x,$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x,$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right),$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right),$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}},$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\sin x}.$

a)  $\infty$ , b) 0, c) 0, d) 0, e)  $-\frac{1}{2}$ , f) 0, g)  $e^{-\frac{9}{2}}$ , h) 1.

3. Napište rovnice tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $x_0$  a nakreslete obrázek.

a)  $f(x) = \sin x, x_0 = \pi$

b)  $f(x) = \ln x, x_0 = 1$

c)  $f(x) = \frac{1}{x+1}, x_0 = 0$

d)  $f(x) = \operatorname{arctg} x, x_0 = 0.$

a)  $y = -x + \pi$ , b)  $y = x - 1$ , c)  $y = -x + 1$ , d)  $y = x.$

## 4. Určete lokální extrémy funkce (tréninkové příklady)

a)  $y = x^3 - 12x - 6,$

b)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1,$

c)  $y = \frac{2x}{x^2-4},$

d)  $y = \frac{x^2}{x^2-1},$

e)  $y = \ln(x^2 + x + 1),$

f)  $y = \frac{\ln x}{x},$

g)  $y = x^2 e^x,$

h)  $y = \operatorname{arctg} x^2.$

a)  $\max[-2, 10], \min[2, -22],$  b)  $\max[1, 3], \min[3, -1],$  c) nejsou, d)  $\max[0, 0],$  e)  $\min[-\frac{1}{2}, \ln \frac{3}{4}],$   
f)  $\max[e, \frac{1}{e}],$  g)  $\max[-2, \frac{4}{e^2}], \min[0, 0],$  h)  $\min[0, 0].$

## 5. Určete intervaly, ve kterých je daná funkce konvexní/konkávní (tréninkové příklady)

a)  $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4,$

b)  $y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x - 3,$

c)  $y = \frac{x^2}{x^2-1},$

d)  $y = \frac{6x}{(x-1)^3},$

e)  $y = \frac{1}{1-e^x},$

f)  $y = x - \ln^2 x.$

a) konvexní na  $(1, \infty),$  konkávní na  $(-\infty, 1),$  b) konvexní na  $(-\infty, -1) \cup (2, \infty),$  konkávní na  $(-1, 2),$   
c) konvexní na  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty),$  konkávní na  $(-1, 1),$  d) konvexní na  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty),$   
konkávní na  $(-1, 1),$  e) konvexní na  $(-\infty, 0),$  konkávní na  $(0, \infty),$  f) konvexní na  $(\frac{1}{e}, \infty),$   
konkávní na  $(0, \frac{1}{e}).$

# Týden 7

## Průběh funkce

1. Vyšetřete průběh funkce a nakreslete její graf (písemkové příklady)

a)  $y = \frac{x^3+1}{x^2}$ ,

b)  $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ ,

c)  $y = \frac{x+2}{x^2}$ ,

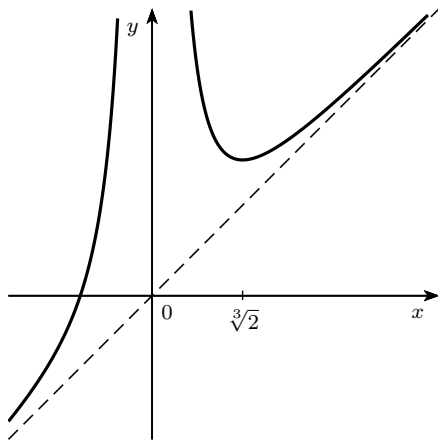
d)  $y = \frac{x^3}{1-x^2}$ ,

e)  $y = \frac{x}{1+x^2}$ ,

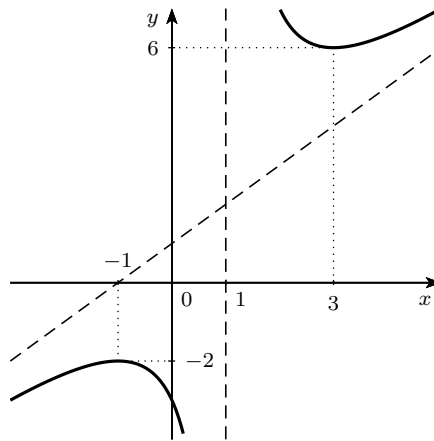
f)  $y = \frac{(x-1)^2}{x-2}$ ,

g)  $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ ,

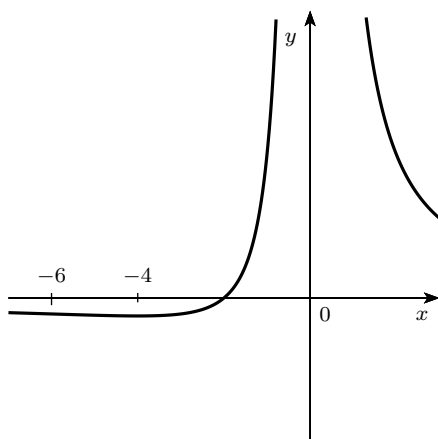
h)  $y = \frac{e^x}{x+1}$ .



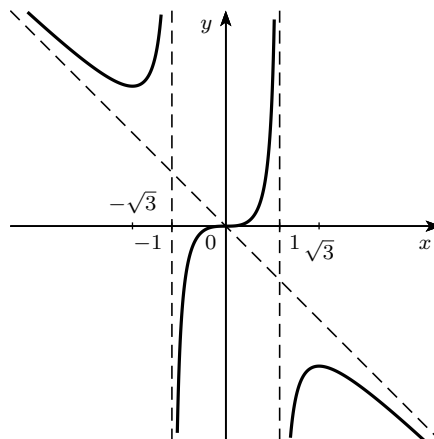
a)



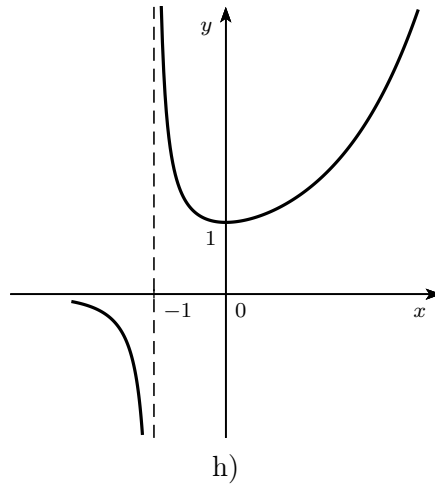
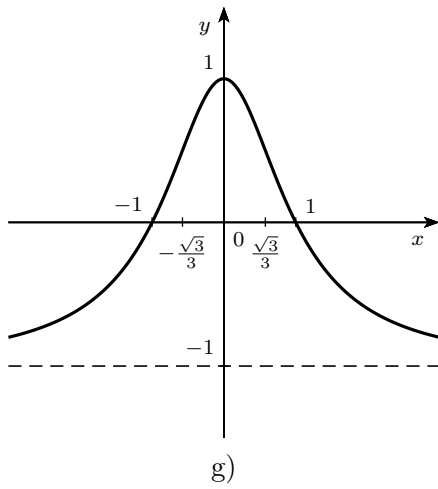
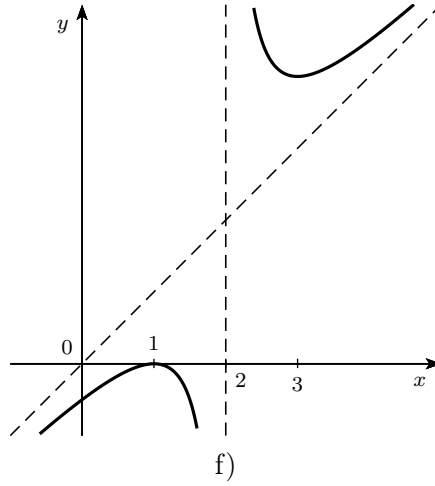
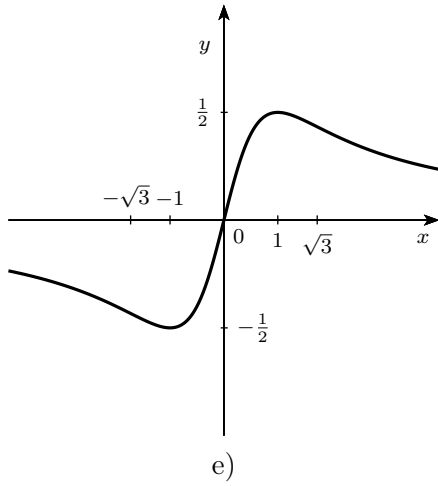
b)



c)



d)



## Týden 8

# Neurčitý integrál I

1. Vypočtete neurčitý integrál (základní vzorce a úpravy)

a)  $\int (2x^3 - x^2 + 3x + 2) dx,$

b)  $\int (x^5 - 3x^2 - x + 5) dx,$

c)  $\int \left( 2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx,$

d)  $\int \sqrt{x} \left( 3\sqrt{x} + 2x - \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx,$

e)  $\int (x+1)^2 (\sqrt{x}-1) dx,$

f)  $\int \left( x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} \right) \sqrt[3]{x} dx.$

a)  $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x,$  b)  $\frac{1}{6}x^6 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x,$  c)  $\frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}},$  d)  $\frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - 5x,$   
e)  $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - x^2 + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{3}x^3,$  f)  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}}.$

2. Vypočtete neurčitý integrál (použití vzorce  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$ )

a)  $\int \left( \frac{1}{x+1} + \frac{4}{2x-1} \right) dx,$

b)  $\int \frac{x^2}{x^3+5} dx,$

c)  $\int \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x + 2} dx,$

d)  $\int \frac{2x^2}{x^3+2} dx,$

e)  $\int \frac{e^x}{e^x-1} dx,$

f)  $\int 2\cotg x dx.$

a)  $\ln|x+1| + 2\ln|2x-1|,$  b)  $\frac{1}{3}\ln|x^3+5|,$  c)  $-\frac{1}{2}\ln(\cos^2 x + 2),$  d)  $\frac{2}{3}\ln|x^3+2|,$  e)  $\ln|e^x-1|,$  f)  $2\ln|\sin x|.$

3. Vypočtete neurčitý integrál (použití vzorce  $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$ )

a)  $\int e^{3x+2} dx,$

b)  $\int \sqrt{5x-1} dx,$

c)  $\int \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) dx,$

d)  $\int \frac{1}{(2x+1)^5} dx,$

e)  $\int \left( \frac{1}{4}x + 9 \right)^3 dx,$

f)  $\int \cos 2x dx.$

a)  $\frac{1}{3}e^{3x+2},$  b)  $\frac{2}{15}\sqrt{(5x-1)^3},$  c)  $-\cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right),$  d)  $-\frac{1}{8(2x+1)^4},$  e)  $\left( \frac{1}{4}x + 9 \right)^4,$  f)  $\frac{1}{2}\sin 2x.$

4. Vypočtete neurčitý integrál (použití vzorce  $\int \frac{1}{(x-x_0)^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctg \frac{x-x_0}{a} + c,$  případně kombinace)

a)  $\int \frac{1}{x^2+4} dx,$

b)  $\int \frac{3}{9x^2+1} dx,$

c)  $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx,$

d)  $\int \frac{x^2+4x+29}{x^2+2x+5} dx,$

e)  $\int \frac{x+1}{x^2-2x+5} dx,$

f)  $\int \frac{x-2}{x^2+6x+10} dx.$

a)  $\frac{1}{2}\arctg \frac{1}{2},$  b)  $\arctg 3x,$  c)  $\frac{1}{2}\arctg \frac{x+1}{2},$  d)  $\frac{1}{5}\arctg \frac{x+2}{5},$  e)  $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+5| + \arctg \frac{x-1}{2},$  f)  $\frac{1}{2}\ln|x^2+6x+10| - 5\arctg(x+3).$

5. Vypočtete neurčitý integrál (rozklad na parciální zlomky)

a)  $\int \frac{x^2+2x-2}{x^3-x^2} dx,$

b)  $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} dx,$

c)  $\int \frac{2x^2+2x+2}{x(x^2+1)} dx,$

d)  $\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2} dx,$

e)  $\int \frac{5x-14}{(x-1)(x^2-4)} dx,$

f)  $\int \frac{3x+16}{x^2-x-6} dx,$

g)  $\int \frac{x^2-x}{(x+1)^3} dx,$

h)  $\int \frac{x^2-3x-2}{(x^2+4)(x+2)} dx.$

a)  $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2}, \ln|x-1| - \frac{2}{x},$  b)  $\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2}, 2 \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1},$  c)  $\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2+1}, 2 \ln|x| + 2 \operatorname{arctg} x,$   
 d)  $\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x}, \ln|x+1| - \ln|x| - \frac{3}{x+1},$  e)  $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2}, 3 \ln|x-1| - 2 \ln|x+2| - \ln|x-2|,$   
 f)  $\frac{5}{x-3} - \frac{2}{x-2}, 5 \ln|x-3| - 2 \ln|x+2|,$  g)  $\frac{1}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3}, \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2},$  h)  $\frac{1}{x+2} - \frac{3}{x^2+4},$   
 $\ln|x+2| - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}.$





# Týden 10

## Výpočet určitého integrálu

1. Vypočtete určité integrál

a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx,$

b)  $\int_{-1}^2 x^3 \, dx,$

c)  $\int_0^1 \frac{3}{1+x^2} \, dx,$

d)  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$

a) 1, b)  $\frac{15}{4}$ , c)  $\frac{3}{4}\pi$ , d)  $\frac{\pi}{3}$ .

2. Vypočtete určitý integrál (metoda per-partes)

a)  $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx,$

b)  $\int_1^e x \ln^2 x \, dx,$

c)  $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx,$

d)  $\int_0^1 x e^{3x} \, dx.$

a)  $\pi$ , b)  $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$ , c)  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$ , d)  $\frac{1}{9}(2e^3 + 1)$ .

3. Vypočtete určitý integrál (metoda substituce)

a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx,$

b)  $\int_1^{\sqrt{6}} x \sqrt{x^2 + 3} \, dx,$

c)  $\int_1^{e^8} \frac{1}{x \sqrt{\ln x + 1}} \, dx,$

d)  $\int_2^3 \frac{x-3}{4+2\sqrt{x-2}} \, dx.$

a)  $\frac{2}{3}$ , b) 4, c)  $\frac{19}{3}$ , d)  $\frac{7}{3} + 6 \ln \frac{2}{3}$ .

# Týden 11

## Aplikace určitého integrálu

1. Vypočítejte neurčitý integrál (zkouškové příklady)

- a)  $y = x^2, y = \frac{1}{x}, x = 2, y = 0$
- b)  $y = \frac{2}{x}, y = 3 - x,$
- c)  $y = 2x^3, y = \frac{2}{x}, x = e, y = 0$
- d)  $y = x^2 - x - 6, y = -x^2 + 5x + 14$
- e)  $y = 8 - x^2, y = x^2 - 6x,$
- f)  $y = x^2 + 4x, y = x + 4.$

$$\text{a) } \frac{1}{3} + \ln 2, \text{ b) } \frac{3}{2} - \ln 4, \text{ c) } \frac{5}{2}, \text{ d) } \frac{343}{3}, \text{ e) } \frac{125}{3}, \text{ f) } \frac{125}{6}.$$

2. Vypočítejte objem rotačního tělesa vzniklého rotací útvaru ohraničeného zadanými křivkami kolem osy  $x$ :

- a)  $y = \sqrt{x}, y = x$
- b)  $y = \sin x, x \in [0, \pi].$

$$\text{a) } \frac{\pi}{6}, \text{ b) } \frac{\pi^2}{2}.$$

3. Odvoďte vzorec pro výpočet objemu

- a) válce o poloměru podstavy  $r$  a výšce  $v$ ,
- b) koule o poloměru  $r$ ,
- c) komolého kužele s poloměry podstavy  $r_1, r_2$  a výškou  $v$ .

$$\text{a) } \pi r^2 v, \text{ b) } \frac{4}{3} \pi r^3, \text{ c) } \frac{1}{3} \pi v (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

4. Jsou dány funkce

$$f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = 2x + 4.$$

Načrtněte obrázek a počítaný objekt vyznačte.

- a) Vypočítejte obsah plochy ohraničené grafy funkcí  $f$  a  $g$ .
- b) Přímka  $g$  vytíná z paraboly  $f$  ohraničený kus. Jaký je objem tělesa, které vznikne rotací tohoto kusu paraboly  $f$  kolem osy  $x$ .
- c) Parabola  $f$  ohraničuje kus přímky  $g$ . Jaký je povrch pláště komolého kužele, který vznikne rotací tohoto kusu přímky kolem osy  $x$ ?
- d) Určete objem tělesa, které vznikne rotací plochy těmito funkcemi omezené kolem osy  $x$ .
- e) Parabola  $f$  ohraničuje kus přímky  $g$ . Určete délku tohoto kusu přímky  $g$ .

$$\text{a) } \frac{32}{3}, \text{ b) } \frac{1072}{15} \pi, \text{ c) } 48\pi\sqrt{5}, \text{ d) } \frac{1408}{15} \pi, \text{ e) } 4\sqrt{5}.$$

## Týden 12

# Nevlastní integrály a interpolace

1. Vypočtete nevlastní integrál (zkouškové)

a)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$

b)  $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$

c)  $\int_1^\infty e^{-3x} dx,$

d)  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx,$

e)  $\int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx,$

f)  $\int_0^1 \frac{1}{x^4} dx.$

a) 2, b) diverguje, c)  $\frac{1}{3e^3}$ , d) 1, e)  $\frac{1}{3}$ , f) diverguje.

2. Určete obsah  $P$  plochy pod grafem funkce  $y = \frac{1}{x}$  pro  $x \in [1, \infty]$ . Jaký je objem tělesa, které vznikne rotací tohoto útvaru? Odhadněte povrch tohoto tělesa.

$$P = \infty, V = \pi, S = \int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}} dx > \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty.$$

3. Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom funkce  $f$ :

a)  $f(-1) = 12, f(0) = 6, f(1) = 0, f(2) = 0,$

b)  $f(-1) = 8, f(-2) = 12, f(1) = 6, f(2) = 44,$

c)  $f(1) = 0, f(-1) = 0, f(0) = 3, f(2) = 15.$

$$\text{a) } L(x) = x^3 - 7x + 6, \text{ b) } L(x) = 3x^3 + 7x^2 - 4x, \text{ c) } L(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3.$$

4. Sestrojte Lagrangeův polynom funkce  $f$ , je-li známo

$$f(1) = 0, \quad f(2) = 8, \quad f(-2) = 0, \quad f(-1) = 2.$$

Vypočtete hodnotu polynomu v bodě  $x = 0$ .

$$L(x) = x^3 + x^2 - 2x, \quad L(0) = 0.$$

5. Sestrojte Lagrangeův polynom funkce  $f$ , je-li známo

$$f(-2) = 0, \quad f(-1) = 3, \quad f(0) = -4, \quad f(2) = 0.$$

Vypočtete hodnotu polynomu v bodě  $x = 1$ .

$$L(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4, \quad L(1) = -9.$$

6. Sestrojte Lagrangeův polynom funkce  $f$ , je-li známo

$$f(1) = -5, \quad f(-1) = 5, \quad f(2) = -7.$$

Najděte lokální extrémy tohoto polynomu.

$$L(x) = x^2 - 5x - 1, \text{ min v } \left[\frac{5}{2}, -\frac{21}{4}\right].$$

7. Sestrojte Lagrangeův polynom funkce  $f$ , je-li známo

$$f(1) = -5, \quad f(-1) = 5, \quad f(2) = -7.$$

Určete hodnotu derivace tohoto polynomu pro  $x = 2$ .

$$L(x) = x^2 - 3x + 3, \quad L'(2) = 1.$$

# Týden 13

## Nekonečné řady

1. Určete součet řady

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)},$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}.$

a)  $\frac{1}{3}$ , b)  $\frac{11}{18}.$

2. Rozhodněte, zda-li řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

konverguje nebo diverguje.

konverguje (srovnávací nebo integrální kritérium)

3. Rozhodněte, zda-li řada

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

konverguje. Pokud ano, určete její součet.

$$\frac{3}{2}$$

4. Určete součet řady

$$x - x^2 + x^3 - x^4 \dots$$

Pro která  $x$  tento součet platí?

$$\frac{x}{1+x}, |x| < 1.$$