Konzultační cvičení
Mechanika F1030

29. září 2020

Michael Krbek

Pokyny pro písemné vypracování úloh

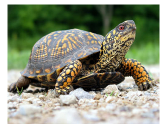
Pište čitelně a jasně. Prostě tak, aby řešení byli schopni pochopit Vaše kamarádky, kamarádi a zejména opravovatelé a konzultanti, kteří rozhodují o tom, zda bude řešení přijato. Součástí vypracovaného řešení by měl být diagram, graf a/nebo obrázek. Každý musí vypracovat vlastní řešení, zejména od ostatních řešení neopisujte ani svá řešení nikomu neposkytujte. Řešení vždy vypracujte nejprve obecně, tj. uveďte výpočet, jenž obsahuje proměnné. Případné zadané číselné hodnoty dosazujte až na závěr. Příklady označené $\star$ jsou náročnější a jejich vypracování není povinné, je však doporučené pro hlubší pochopení problematiky.

1. Kinematika hmotných bodů

Příklad 1. Achilles a želva. Objasněte zdánlivý paradox, jehož autorem je Zenón Elejský. Jedná se o závod Achilla a želvy. Předpokládejme, že Achilles se pohybuje rychlostí o velikosti $v > 0$ a želva rychlostí o velikosti $w \in (0, v)$, oba stejným směrem. Na začátku ponechá Achilles želvě náskok délky ℓ_0 metrů. Zenón argumentoval, že Achilles želvu nikdy nedožene. Achilles a želva totiž nevědomky sledují následující algoritmus:

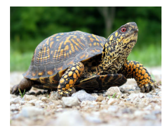
- 0.krok. Achilles a želva vyběhnou zároveň,
- čas, za který Achilles doběhne na místo, odkud vyrazila želva, je $t_0 = \ell_0/v$,
- za tento čas ovšem želva popolezla o vzdálenost $\ell_1 = wt_0 = \ell_0 w/v$,
- situace se opakuje, nyní je ovšem Achilles od želvy vzdálen ℓ_1
- v přechodu od i-tého k $(i+1)$-nímu kroku tedy musíme obecně vzdálenost Achilla a želvy ℓ_i nahradit ℓ_{i+1}.

V okamžiku startu:



$\longrightarrow$ $\rightarrow$

Achilles doběhne na místo, z kterého startovala želva … ℓ_0:



$\longrightarrow$ $\rightarrow$

Ale želva zatím urazila vzdálenost ℓ_1.

Po konečném počtu takových kroků Achilles želvu nedožene a z toho Zenón nesprávně usuzoval, že Achilles želvu nedožene nikdy.

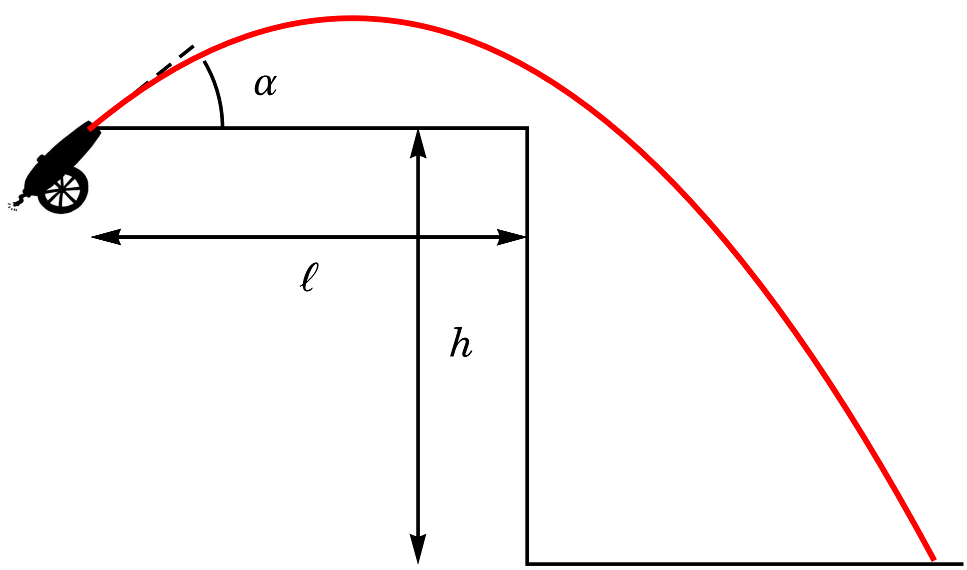
(a) Vyjádřete pro i-tý krok čas t_i a vzdálenost ℓ_i.

(b) Zapište celkový čas $t = t_0 + t_1 + t_2 + \cdots$, za který Achilles dožene želvu, a vzdálenost $\ell = \ell_0 + \ell_1 + \ell_2 + \cdots$ od místa, z kterého vyběhl, do místa, kdy želvu dožene, jako nekonečné řady.

(c) Pomocí skládání rychlostí odvoďte výraz pro čas t a vzdálenost ℓ elementárním způsobem.

(d) Srovnáním obou způsobů vyjádření t a ℓ odvoďte vzorec pro součet nekonečné geometrické řady.

Příklad 2. Dělostřelba. Dělo je umístěno ve vzdálenosti ℓ od okraje útesu a velikost jeho úsťové rychlosti je v. Pod jakým úhlem α je třeba vystřelit projektil z děla, aby tento dopadl co možná nejblíže od paty útesu, jehož výška je h? Odpor vzduchu zanedbejte.



Příklad 3. Soustavy souřadnic. Vrtulové letadlo letí vodorovně ve výšce h stálou rychlostí o velikosti v vzhledem k Zemi. Jeho vrtule se otáčí konstantní úhlovou rychlostí ω a její listy mají délku R.

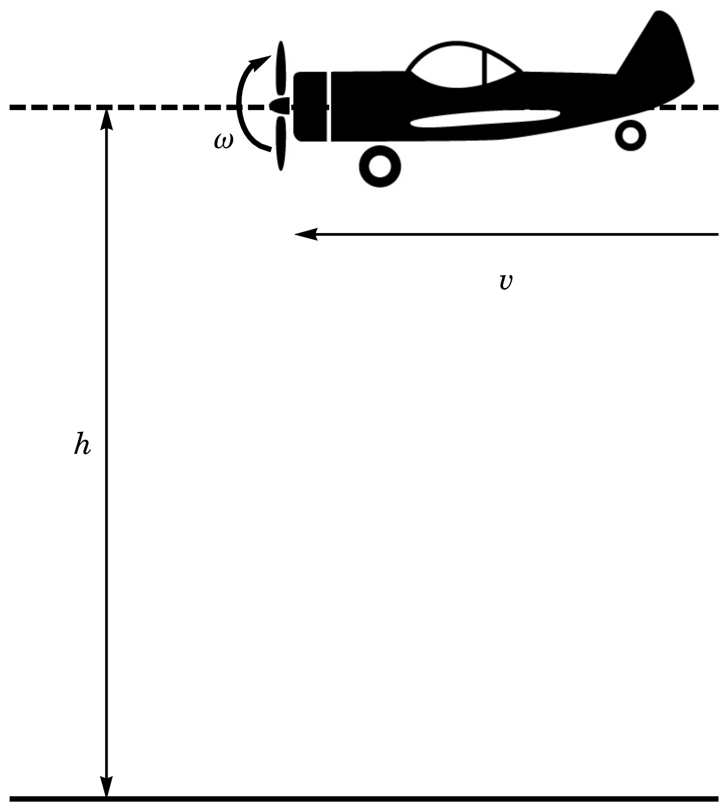
(a) Zvolte vhodně soustavu souřadnic V spojenou s vrtulí a vyjádřete závislost polohy, rychlosti a zrychlení špičky P jednoho z listů vrtule vzhledem k V na čase.

(b) Zvolte vhodně soustavu souřadnic L spojenou s letadlem a vyjádřete závislost polohy, rychlosti a zrychlení zvolené špičky P listu vrtule vzhledem k L na čase.

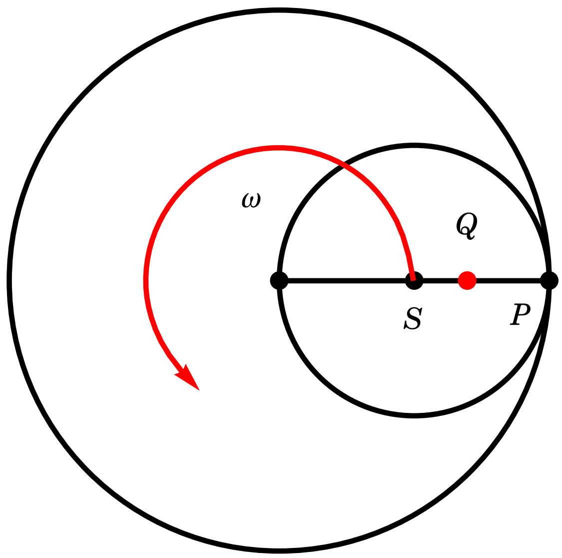
(c) Zvolte vhodně soustavu souřadnic Z spojenou se Zemí a vyjádřete závislost polohy, rychlosti a zrychlení špičky P listu vrtule vzhledem k Z.

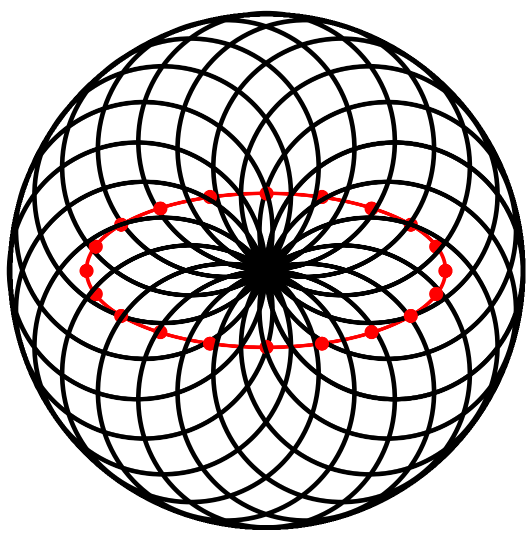
(d) Napište vztah pro přechod od soustavy V k soustavám L a Z a naopak.

(e) Rozhodněte, které ze soustav V, L a Z lépe či hůře vyhovují požadavkům inerciálnosti a proč.



Příklad 4. Tusiho-Kardanův převod. ⋆ V rovině uvažme pevnou kružnici, po jejímž vnitřku se rovnoměrně a bez prokluzování valí jiná kružnice přesně polovičního poloměru tak, že její střed S má konstantní úhlovou rychlost o velikosti ω. Určete parametricky křivku, kterou při tomto valivém pohybu opisuje pevně zvolený bod Q na úsečce PS a identifikujte ji. Jaká křivka odpovídá případu $Q = P$ resp. $Q = S$? Dále vypočtěte okamžitou rychlost bodu Q, její velikost a jednotkový tečný a normálový vektor ke křivce opisované bodem Q.

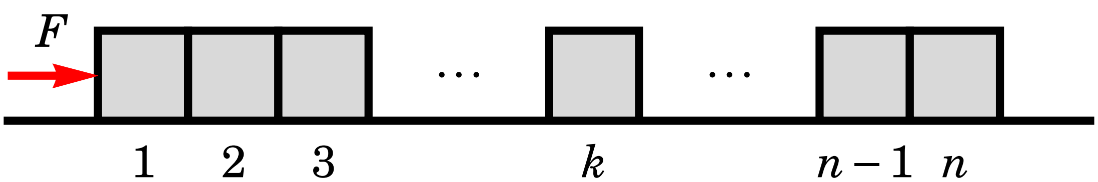




Znázornění dráhy bodu Q pro $|SQ| = R/5$.

2. Dynamika hmotných bodů

Příklad 5. Krychle. Na dokonale hladkém vodorovném stole leží n shodných krychlí poskládaných těsně za sebou, každá o hmotnosti m. Na první krychli působí vodorovná síla o velikosti F. Stanovte všechny síly, které působí na k-tou krychli. Návod: Napřed si vše rozmyslete pro dvě a tři krychle a pak zkuste zobecnit.



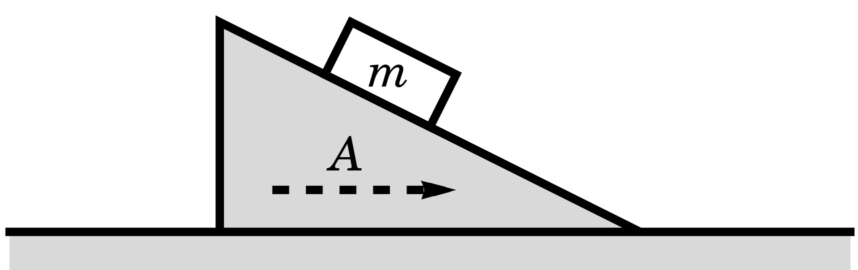
Příklad 6. Cirkus. Cirkusový akrobat o hmotnosti M vyskočí z trampolíny přímo vzhůru rychlostí o velikosti v. Při výskoku sejme ve výšce h ze stojící hrazdy cvičenou opici o hmotnosti m. Jaké maximální výšky potom pár dosáhne?

Příklad 7. Nakloněná rovina v pohybu. Kostka o hmotnosti m leží v klidu na klínu s úhlem sklonu α. Koeficient statického tření mezi klínem a kostkou je f.

(a) Nalezněte, jakou maximální velikost může mít úhel α, aby kostka zůstala v klidu, je-li klín pevně spojen s vodorovnou podložkou.

(b) Klín se pohybuje s vodorovným zrychlením o konstantní velikosti A. Předpokládejte, že je splněna podmínka z (a). Nalezněte minimální hodnotu velikosti zrychlení A, aby kostka byla v klidu vzhledem ke klínu.

(c) Pro situaci v (b) nalezněte maximální hodnotu velikosti zrychlení A, aby kostka byla v klidu vzhledem ke klínu.



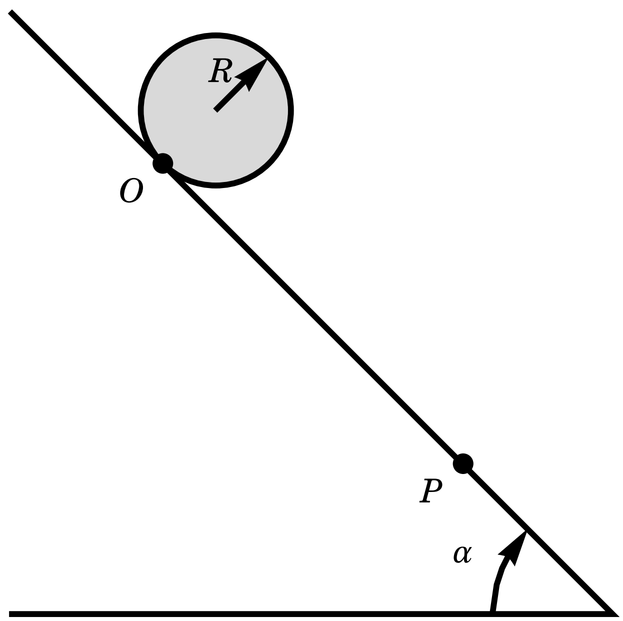
Příklad 8. Na centrifuze. ⋆ Kotouč o poloměru R rovnoměrně rotuje kolem svislé osy úhlovou rychlostí ω. Podél svého poloměru má připevněnou kolejnici, po které se bez tření může pohybovat vozík o hmotnosti m.

(a) Jakou nejmenší práci vykoná výsledná síla působící na vozík při jeho přesunu z obvodu kotouče do jeho středu?

(b) Za jak dlouho se dostane vozík z místa o vzdálenosti r od středu zpět na obvod kotouče, pokud vozík vypustíme volně?

3. Dynamika tuhých těles

Příklad 9. Koule valící se a klouzající. Sklouzne po nakloněné rovině (úhel sklonu α) homogenní koule (poloměr R, hmotnost M) rychleji, než se bude valit bez prokluzování? Odvoďte poměr zrychlení, rychlostí a časů měřených v daném místě P nakloněné roviny, vypustíme-li vždy klouzající i valící se kouli volně z daného místa O nakloněné roviny. Prakticky by šlo uspořádání, kdy koule klouže, realizovat např. pomocí vzduchového polštáře mezi nakloněnou rovinou a koulí.

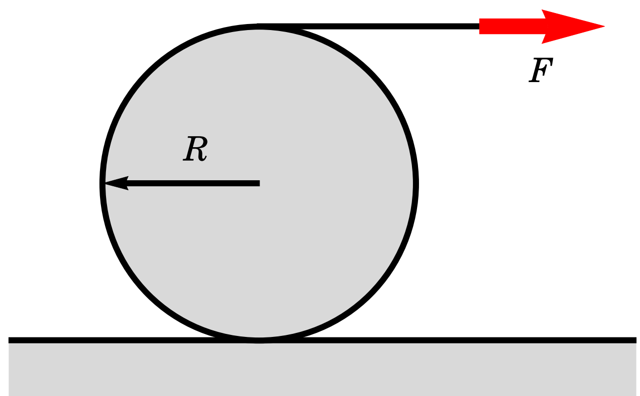


Příklad 10. Špulka. Na homogenní plný válec o hmotnosti M a poloměru R působí vodorovná síla o velikosti F. Síla působí prostřednictvím niti ovinuté okolo válce a válec se valí bez prokluzování po vodorovném povrchu. Určete

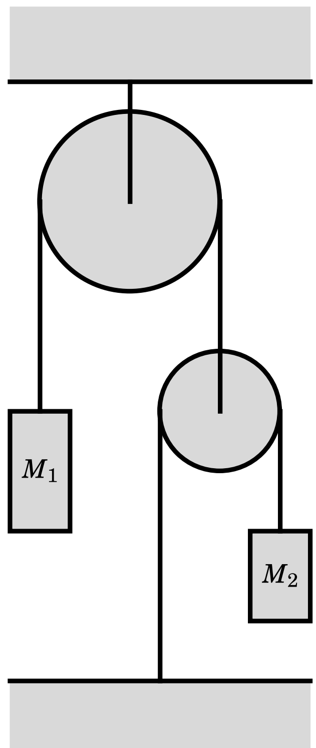
(a) zrychlení středu hmotnosti válce,

(b) úhlové zrychlení válce vzhledem k jeho středu hmotnosti,

(c) třecí sílu působící na válec.



Příklad 11. Kladky. Dvě závaží o hmotnostech M_1 a M_2 jsou propojeny systémem lanek a kladek. Lanka považujte za nehmotná a nepružná, kladky za nehmotné a tření v jejich závěsech za zanedbatelné. Spočtěte zrychlení těles o hmotnosti M_1 a M_2.



Příklad 12. Změny délky dne. ⋆ Odhadněte, jak (by) ovlivnily následující události moment setrvačnosti, úhlovou rychlost otáčení a tím i délku dne Země:

(a) výbuch Krakatoy,

(b) stavba Velké čínské zdi,

(c) ochlazení (a tím i smrštění) celé atmosféry o 30°,

(d) doba ledová,

(e) celé třetihorní vrásnění.