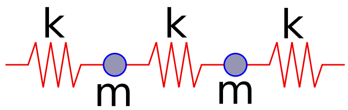
D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz



1D řetízek identických **atomů** interagujících elasticky vždy pouze s nejbližšími sousedy lze aproximovat sadou stejných malých závaží o hmotnosti m, spojených lineárně identickými nehmotnými pružinami o tuhosti k. Rovnovážná vzdálenost sousedních závaží nechť je a, výchylky $x[j]$ jednotlivých závaží uvažujte od jejich rovnovážných poloh. Předpokládejte pohyb pouze ve směru pružin (zanedbejte tíhové působení).

- Předpokládejte periodické okrajové podmínky (délka opakujícího se motivu řetízku je Na) a specifikujte jejich vliv na předpokládaný tvar řešení $x[j]\sim\tau^j$. Nalezněte disperzní relaci pro vlnu v tomto řetízku.

Zapišme nejprve pohybové rovnice pro všechna závaží $x[j]$ v aproximaci harmonických výchylek:

$$1 < j < N: \qquad -m\omega^2 x[j] = -k\Big(x[j] - x[j-1]\Big) - k\Big(x[j] - x[j+1]\Big)$$

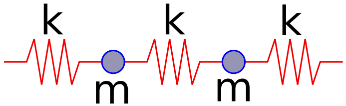
$$j = 1: \qquad -m\omega^2 x[1] = -k\Big(x[1] - x[N]\Big) - k\Big(x[1] - x[2]\Big)$$

$$j = N: \qquad -m\omega^2 x[N] = -k\Big(x[N] - x[N-1]\Big) - k\Big(x[N] - x[1]\Big)$$

V maticovém zápisu

$$-m\omega^2 \begin{pmatrix} x[1] \\ \vdots \\ x[j-1] \\ x[j] \\ x[j+1] \\ \vdots \\ x[N] \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & 1 \\ & \ddots & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[1] \\ \vdots \\ x[j-1] \\ x[j] \\ x[j+1] \\ \vdots \\ x[N] \end{pmatrix}$$

D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz



1D řetízek identických **atomů** interagujících elasticky vždy pouze s nejbližšími sousedy lze aproximovat sadou stejných malých závaží o hmotnosti m, spojených lineárně identickými nehmotnými pružinami o tuhosti k. Rovnovážná vzdálenost sousedních závaží nechť je a, výchylky $x[j]$ jednotlivých závaží uvažujte od jejich rovnovážných poloh. Předpokládejte pohyb pouze ve směru pružin (zanedbejte tíhové působení).

- Předpokládejte periodické okrajové podmínky (délka opakujícího se motivu řetízku je Na) a specifikujte jejich vliv na předpokládaný tvar řešení $x[j]{\sim}\tau^j$. Nalezněte disperzní relaci pro vlnu v tomto řetízku.

Zaveďme do pohybových rovnice předpoklad $x[j]{=}\tau^j$:

$$\begin{aligned} 1 < j < N: &\qquad -m\omega^2\tau^j = k\tau^{j-1} - 2k\tau^j + k\tau^{j+1} \\ j = 1: &\qquad -m\omega^2\tau = k\tau^N - 2k\tau + k\tau^2 \\ j = N: &\qquad -m\omega^2\tau^N = k\tau^{N-1} - 2k\tau^N + k\tau^1 \end{aligned}$$

Rovnice budou řešitelné, pokud $\tau^N{=}1$, kde τ je skalár. Řešením podmínky jsou (komplexní) odmocniny z jedničky:

$$\tau_n = \exp(2\pi \mathrm{i} n/N)$$

a zpětným dosazením

$$-m\omega_n^2 = k\exp(-2\pi\mathrm{i}n/N) - 2k + k\exp(2\pi\mathrm{i}n/N)$$

neboli

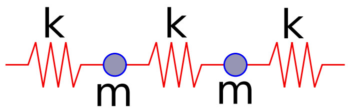
$$\frac{m}{k}\omega_n^2 = 2 - \Big[\exp(-2\pi\mathrm{i}n/N) + \exp(2\pi\mathrm{i}n/N)\Big] = 2\left(1 - \cos(2\pi n/N)\right)$$

a po úpravě

$$\omega_n = 2\omega_0 \left|\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)\right|$$

D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

1D řetízek identických **atomů** interagujících elasticky vždy pouze s nejbližšími sousedy lze aproximovat sadou stejných malých závaží o hmotnosti m, spojených lineárně identickými nehmotnými pružinami o tuhosti k. Rovnovážná vzdálenost sousedních závaží nechť je a, výchylky $x[j]$ jednotlivých závaží uvažujte od jejich rovnovážných poloh. Předpokládejte pohyb pouze ve směru pružin (zanedbejte tíhové působení).



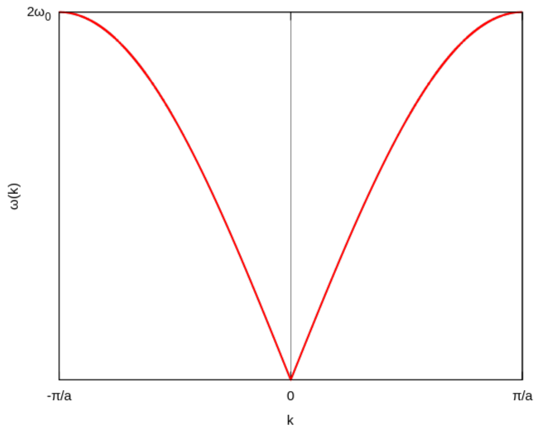
- Předpokládejte periodické okrajové podmínky (délka opakujícího se motivu řetízku je Na) a specifikujte jejich vliv na předpokládaný tvar řešení $x[j]{\sim}\tau^j$. Nalezněte disperzní relaci pro vlnu v tomto řetízku.

Co se stane, když budeme jako periodickou volit různou délku $l{=}Na$ řetízku?

$$\omega_n = 2\omega_0 \left|\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)\right| = 2\omega_0 \left|\sin(\pi q)\right|, \qquad \text{kde} \qquad q = \frac{n}{N} \in \langle 0, 1\rangle$$

Můžeme ovšem také psát

$$\omega_n = 2\omega_0 \left|\sin(k_n a)\right|, \qquad \text{kde} \qquad k_n = \frac{\pi}{a} q$$



Celá výchylka j-tého závažíčka je potom

$$x_n[j] \sim \tau_n^j \exp(\mathrm{i}\omega t) = A \exp^{\mathrm{i}(k_n a j + \omega_n t)}$$