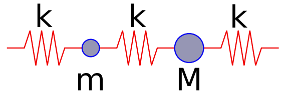
D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

1.1 Nalezněte všechny větve disperzní relace pro 1D řetízek střídajících se atomů o dvou různých hmotnostech m a M; tuhost všech vazeb uvažujte k, vzdálenost sousedních atomů stejné hmotnosti nechť je a. Pro výchylky $x[j]$, $X[j]$ v subřetízcích atomů stejné hmotnosti předpokládejte řešení ve tvaru $x[j],X[j]\propto\exp(\mathrm{i}[\omega t+kaj])$.



- Předpokládejte periodické okrajové podmínky (délka opakujícího se motivu řetízku je Na) a specifikujte jejich vliv na předpokládaný tvar řešení $x[j]\sim\tau^j$. Nalezněte disperzní relaci pro vlny v tomto řetízku.

Co se stane, když se řetízek bude skládat z pravidelného střídání dvou závaží různé hmotnosti?

$$1<j<N:\left\{\begin{aligned} -\omega^2 m x[j] &= -k\Big(x[j]-X[j-1]\Big)-k\Big(x[j]-X[j]\Big)\\ -\omega^2 M X[j] &= -k\Big(X[j]-x[j]\Big)-k\Big(X[j]-x[j+1]\Big)\end{aligned}\right.$$

$$j=1: \qquad -\omega^2 m x[1] = -k\Big(x[1]-X[N]\Big)-k\Big(x[1]-X[1]\Big)$$

$$j=N: \qquad -\omega^2 M X[N] = -k\Big(X[N]-x[N]\Big)-k\Big(X[N]-x[1]\Big)$$

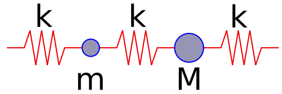
Předpokládejme $x[j]=u\tau^j$, $X[j]=U\tau^j$, přičemž $\tau^N=1$. Tímto předpokladem okrajové podmínky rozřešíme a zbývá nám soustava pro dvě neznámé funkce

$$-\frac{\omega^2 m}{k}u = -2u + U(\tau^{-1}+1)$$

$$-\frac{\omega^2 M}{k}U = -2U + u(1+\tau)$$

D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

1.1 Nalezněte všechny větve disperzní relace pro 1D řetízek střídajících se atomů o dvou různých hmotnostech m a M; tuhost všech vazeb uvažujte k, vzdálenost sousedních atomů stejné hmotnosti nechť je a. Pro výchylky $x[j]$, $X[j]$ v subřetízcích atomů stejné hmotnosti předpokládejte řešení ve tvaru $x[j], X[j] \propto \exp(\mathrm{i}[\omega t + kaj])$.



- Předpokládejte periodické okrajové podmínky (délka opakujícího se motivu řetízku je Na) a specifikujte jejich vliv na předpokládaný tvar řešení $x[j] \sim \tau^j$. Nalezněte disperzní relaci pro vlny v tomto řetízku.

Předchozí soustavu lze zapsat maticově,

$$\begin{pmatrix} \omega^2 m/k - 2 & 1 + \exp(-2\pi \mathrm{i} n/N) \\ 1 + \exp(2\pi \mathrm{i} n/N) & \omega^2 M/k - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ U \end{pmatrix} = 0$$

jejíž netriviální řešení vyžaduje singulární matici:

$$(\omega^2 m/k - 2)(\omega^2 M/k - 2) - (2 + 2\cos(2\pi n/N)) = 0$$

odkud dostáváme dvě větve disperzní relace,

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k}{mM}\left(M + m \pm \sqrt{m^2 + M^2 + 2mM\cos(2\pi n/N)}\right)$$