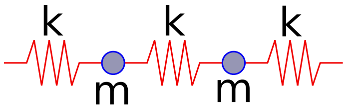
D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

Vlnová rovnice. Uvažujte nekonečný řetízek stejných malých závaží o hmotnosti m, spojených lineárně identickými nehmotnými pružinami o tuhosti k. Rovnovážná vzdálenost sousedních závaží nechť je a, a předpokládejte pohyb pouze ve směru pružin. Pole výchylek jednotlivých závaží z jejich rovnovážných poloh popište spojitou veličinou $u(x)$.



- Sestavte pohybové rovnice pro j-té závaží a ukažte, že za předpokladu $a \to 0$ tyto pohybové rovnice přechází v rovnici vlnovou.

Pojďme se podívat na Taylorův rozvoj spojité funkce $u(x)$ v okolí bodu x_0,

$$u(x) = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}u''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots \frac{u^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1},$$

zde se zbytkem v Lagrangeově tvaru, kde ξ leží mezi x a x_0. Přepišme rozvoj s označením $x = x_0 + \varepsilon$ do podoby

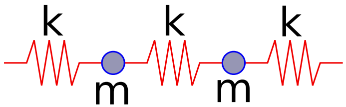
$$u(x_0 + \varepsilon) = u(x_0) + u'(x_0)\varepsilon + \frac{1}{2!}u''(x_0)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

a přidejme ještě obdobný rozvoj opačným směrem,

$$u(x_0 - \varepsilon) = u(x_0) - u'(x_0)\varepsilon + \frac{1}{2!}u''(x_0)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

Vlnová rovnice. Uvažujte nekonečný řetízek stejných malých závaží o hmotnosti m, spojených lineárně identickými nehmotnými pružinami o tuhosti k. Rovnovážná vzdálenost sousedních závaží nechť je a, a předpokládejte pohyb pouze ve směru pružin. Pole výchylek jednotlivých závaží z jejich rovnovážných poloh popište spojitou veličinou $u(x)$.



- Sestavte pohybové rovnice pro j-té závaží a ukažte, že za předpokladu $a \to 0$ tyto pohybové rovnice přechází v rovnici vlnovou.

$$u(x_0+\varepsilon) = u(x_0) + u'(x_0)\varepsilon + \frac{1}{2!}u''(x_0)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$
$$u(x_0-\varepsilon) = u(x_0) - u'(x_0)\varepsilon + \frac{1}{2!}u''(x_0)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

Za předpokladu, že výchylky jednotlivých závaží jsou známy, můžeme tyto dvě rovnice využít k diskretizovanému vyjádření derivací. Vyloučením členů s druhou derivací dostáváme

$$u'(x_0) = \frac{u(x_0+\varepsilon) - u(x_0-\varepsilon)}{2\varepsilon} + O(\varepsilon^2).$$

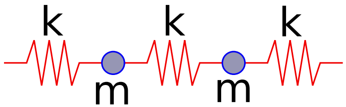
Tomuto vzorci se říká *dvoubodová centrální* první derivace. Pokud naopak vyloučíme členy s první derivací, dostáváme

$$u''(x_0) = \frac{u(x_0+\varepsilon) - 2u(x_0) + u(x_0-\varepsilon)}{\varepsilon^2} + O(\varepsilon).$$

Tomuto vztahu se říká *dvoubodová centrální* druhá derivace. Obdobným způsobem se hledají n-bodové k-té derivace.

D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

Vlnová rovnice. Uvažujte nekonečný řetízek stejných malých závaží o hmotnosti m, spojených lineárně identickými nehmotnými pružinami o tuhosti k. Rovnovážná vzdálenost sousedních závaží nechť je a, a předpokládejte pohyb pouze ve směru pružin. Pole výchylek jednotlivých závaží z jejich rovnovážných poloh popište spojitou veličinou $u(x)$.



- Sestavte pohybové rovnice pro j-té závaží a ukažte, že za předpokladu $a \to 0$ tyto pohybové rovnice přechází v rovnici vlnovou.

$$u''(x_0) = \frac{u(x_0+\varepsilon) - 2u(x_0) + u(x_0-\varepsilon)}{\varepsilon^2} + O(\varepsilon).$$

Vraťme se k pohybové rovnici na obecném místě homogenního řetízku,

$$j : \qquad m\ddot{x}[j] = -k\Big(x[j] - x[j-1]\Big) - k\Big(x[j] - x[j+1]\Big) = kx[j-1] - 2kx[j] + kx[j+1].$$

Není těžké tuto rovnici přepsat pomocí diskretizované druhé derivace,

$$O(a^3) : \qquad m\ddot{u}(x[j]) = ku(x[j])''a^2,$$

a po přechodu ke spojité souřadnici x

$$\ddot{u} - v^2 u'' = 0,$$

kde $v = a\sqrt{k/m}$ má jednotku m.s^{-1} a význam rychlosti šíření fáze podél řetízku.