

C. OPTIKA

Maxwellovy rovnice v elektroneutrálním nemagnetickém mediu:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J}_{\text{free}}.\end{aligned}$$

1. **Mawellovy rovnice.** Uvažujte Maxwellovy rovnice v prostředí s polarizací \mathbf{P} a volným proudem \mathbf{J}_{free} .

- Ukažte, že vlnová rovnice je důsledkem platnosti Faradayova a Ampérova zákona (s využitím zákona Gaussova).

$$\left[\Delta \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}_{\text{free}}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{P}) \right]$$

- *Rovinná vlna.* Ukažte, že $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$ je řešením vakuové vlnové rovnice. Z Gaussova zákona v případě izotropního dielektrika ($\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$) ukažte, že $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k}$ a z Faradayova zákona dopočítejte $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$.

$$\left[\mathbf{B}_0 = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0, \mathbf{E} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{k} \perp \mathbf{E} \right]$$

- *Susceptibilita.* Pro speciální případ izotropního dielektrika ($\mathbf{J}_{\text{free}} = 0, \nabla \cdot \mathbf{P} = 0$) řešte vlnovou rovnici s využitím předpokladu $\mathbf{E}, \mathbf{P} \approx \exp(i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t))$.

$$\left[\mathbf{P}_0(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}_0(\omega) : k = (\omega/c) \sqrt{1 + \chi} \right]$$

- *Index lomu.* Zaveďte (komplexní) index lomu $n + i\kappa$ prostřednictvím vlnočtu $k = n\omega/c$ a zjistěte dopad jeho reálné a imaginární části na šířící se rovinnou vlnu $E = E_0 \exp(i(\omega t - kx))$.

$$\left[E = E_0 \exp(-2\pi\kappa/\lambda_0) \cos(\omega t - 2\pi n x/\lambda_0) \right]$$

1.1 *Dielektrická funkce.* Naleznete vzájemné transformační vztahy mezi relativní permitivitou $\varepsilon_r + i\varepsilon_i = \chi(\omega) + 1$ a indexem lomu $n + i\kappa$.

$$\left[\varepsilon_r + i\varepsilon_i = (n + i\kappa)^2 : \varepsilon_r = n^2 - \kappa^2, \varepsilon_i = 2n\kappa, n^2 = \frac{|\varepsilon| + \text{Re}\varepsilon}{2}, k^2 = \frac{|\varepsilon| - \text{Re}\varepsilon}{2} \right]$$

1.2* *Debyeův rozklad.* Uvažujte rozklad

$$\mathbf{u} = \left[\mathbf{u}_0 + \frac{\lambda}{i} \mathbf{u}_1 + \left(\frac{\lambda}{i} \right)^2 \mathbf{u}_2 + \dots \right] \exp\left(\frac{i}{\lambda} \psi \right),$$

kde forma zavedení malého parametru λ reflektuje představu rychle se měnící fáze oproti mnohem pomaleji se měnící amplitudě; všechny složky \mathbf{u}_j v rozvoji amplitudy i fázový člen ψ (nazývaný často *eikonál*) závisí na souřadnicích i čase. Dosaďte uvedený rozvoj do vakuové vlnové rovnice a získejte rovnice jednotlivých aproximací (podle řádu λ). Ukažte, že vlnovou rovnici lze tímto způsobem vyřešit řád po řádu.

$$\left[\lambda^{-2} : (\nabla \psi)^2 - c^2 \dot{\psi}^2 = 0 \text{ rovnice eikonálu}, \lambda^{-1} : \nabla(I_0 \nabla \psi) - c^2(I_0 \dot{\psi}) = 0 \text{ rovnice pro přenos intenzity } I_0 = |\mathbf{u}_0|^2 \right]$$

2. **Materiálová prostředí.**

2.1 *Lorentzův model* pro dielektrika. Pro pohyb elektronů o náboji $-e$ v látce předpokládejte model tlumeného oscilátoru ($F_t = -m_e \gamma \dot{x}$) řízeného elastickou silou $F = -Kx$ a buzeného lokálním elektrickým polem; pro jednoduchost předpokládejte, že lokální pole je přímo rovno dopadající světelné vlně $E_0 \exp(i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}))$. Sestavte pohybovou rovnici pro elektron a naleznete amplitudu jeho kmitů za předpokladu, že $x = x_0 \exp(i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}))$.

$$\left[x_0 = -\frac{e}{m_e} \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}, \omega_0^2 = K/m_e \right]$$

2.2 *Drudeho model* pro kovy.

□

3. **Fermatův princip** postuluje, že mezi dvěma pevně zadanými body se světlo šíří tak, aby celková doba jeho šíření byla minimální.

- *Optická dráha* δ je v homogenním prostředí definována jakou součin indexu lomu n tohoto prostředí a vzdálenosti d , kterou v něm světlo urazilo (ne nutně přímočaře), $\delta = nd$. Při přechodu mezi prostředními je optická dráha aditivní, $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \dots$. Ukažte, že Fermatův princip je ekvivalentní požadavku minimální optické dráhy během šíření světla.

$$\left[t_i = \frac{d_i}{c/n_i} \right]$$

- Ukažte, že v homogenním prostředí se Fermatův princip (pro optickou dráhu) redukuje na podmínku přímočarého světla.

$$[n = \text{konst}]$$

- Z Fermatova principu pro optickou dráhu vyvoďte pro lom paprsku na rovinném rozhraní dvou homogenních prostředí (n, n') Snellův zákon. Úhly paprsků (α, α') určujte vzhledem k normále k rozhraní. Naleznete paraxiální aproximaci ($\alpha, \alpha' \rightarrow 0$) Snellova zákona.

$$[n \sin \alpha = n' \sin \alpha', \quad n\alpha \doteq n'\alpha']$$

- Ukažte, že při vhodně zvolené znaménkové konvenci pro odražené světlo ($n' < 0, \alpha' < 0$) lze ze Snellova zákona odvodit též zákon odrazu.

$$[\alpha' = -\alpha]$$

3.1* *Huygensův-Fresnelův princip*. Ukažte, že pro monochromatický bodový zdroj o vlnové délce λ je možná velikost pole generovaného ve zvoleném bodě počítat prostřednictvím bodových příspěvků pocházejících z libovolné zvolené vlnoplochy, podmínkou postupu že však je projevení tzv. faktoru sklonu $K(\chi)$, závislého na úhlu χ , pod kterým vlnoplochu pozorujeme; hodnotu faktoru sklonu odvoďte pro zjednodušený případ $\chi = 0$.

$$[K(0) = i/\lambda]$$

4. **Maticový formalismus**. Uvažujte osově souměrný optický systém, ve kterém paprsek v prostředí o indexu lomu n popíšete pomocí jeho vzdálenosti h od optické osy a směrem šíření \mathbf{s} . Vektor \mathbf{s} rozložte do složek podél optické osy (s_x) a kolmo k optické ose (s_z) a předpokládejte $|\mathbf{s}| = n$. Při výpočtech dodržujte standardní znaménkové konvence.

- Ukažte, že v paraxiální aproximaci je možné závislost koncového stavu paprsku $\begin{pmatrix} h' \\ s'_x \end{pmatrix}$ na stavu počátečním $\begin{pmatrix} h \\ s_x \end{pmatrix}$ vyjádřit maticově: pro šíření o osový interval délky d v homogenním prostředí o indexu lomu n a pro lom na rozhraní o poloměru křivosti r mezi prostředními o indexech lomu n a n' příslušné matice naleznete.

$$\left[\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix}, \varphi = -(n-n')/r \text{ je mohutnost lomivého rozhraní} \right]$$

- V daném místě podél optické osy představuje $\begin{pmatrix} h \\ s_x \end{pmatrix}$ obecný paprsek. Navrhněte speciální volbu parametrů pro význačné typy světelných svazků.

$$\left[\begin{pmatrix} \text{konst} \\ s_x \end{pmatrix} \text{ ohnisko, } \begin{pmatrix} h \\ \text{konst} \end{pmatrix} \text{ rovnoběžný svazek, } \begin{pmatrix} \text{konst} \\ \text{konst} \end{pmatrix} \text{ konkrétní paprsek} \right]$$

- Uvažujte obecný optický systém popsáný maticí $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ obklopený prostředními o indexech lomu n a n' . Naleznete podmínku, za které bude systém pracovat jako zobrazující (převádět bodové předměty na bodové obrazy). Využijte skutečnosti, že $\det \mathbf{T} = \det \mathbf{R} = 1$.

$$\left[h' \text{ nezávisí na } s_x: \quad c = -a \frac{n'}{t'} - d \frac{n}{t} - b \frac{nn'}{tt'}, \quad \mathbf{T}' \mathbf{M} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ c & 1/\beta \end{pmatrix}, \quad \beta \text{ je zvětšení} \right]$$

4.1 *Čočka*. Nalezněte matici Φ tlusté čočky (tloušťka t , index lomu n_L), oddělující prostředí s indexem lomu n a n' a její speciální případy: tlustou čočku ponořenou do prostředí, tenkou čočku a tenkou čočku ponořenou do prostředí. Nalezněte ohniskové vzdálenosti tenké čočky a určete polohu hlavních rovin v tlusté čočce, mají-li pro její ohniskové vzdálenosti platit formálně stejné výrazy jako u čočky tenké.

$$\left[\Phi = \begin{pmatrix} 1 - \varphi_1 t / n_1 & t / n_1 \\ -\varphi & 1 - \varphi_2 t / n_1 \end{pmatrix}, \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2 t / n_1, f = -n / \varphi, f' = n' / \varphi \right]$$

4.2 *Lupa*. Nalezněte zvětšení poskytované lupou o mohutnosti φ_{lupa} při pozorování neakomodovaným okem. Jak se toto zvětšení změní, když akomodaci připustíme (lupu přiložíme těsně k oku o mohutnosti φ_{oko})? $[\beta_{\text{neakomod}} = d / f_{\text{lupa}}, \beta_{\text{akomod}} = \beta_{\text{neakomod}} + 1]$

4.3 *Mikroskop*. Mikroskop je optická soustava dvou spojných čoček - objektivu s mohutností φ_{ob} a okuláru s mohutností φ_{ok} , která pracuje jako dvoustupňová lupa: nejprve je objektivem vytvořen skutečný obraz v ohniskové rovině okuláru, který je následně přímo pozorován okulárem coby lupou. Díky tomu lze v mikroskopu pozorovat neakomodovaným okem. Nalezněte zvětšení β_{mik} mikroskopu, jako parametr použijte tubusovou vzdálenost Δ mezi objektivem a okulárem.

$$\left[\beta_{\text{mik}} = \beta_{\text{ob}} \beta_{\text{ok}} = \frac{\Delta}{f_{\text{ob}}} \frac{d}{f_{\text{ok}}}, d \text{ je konvenční zraková vzdálenost} \right]$$

4.4 *Dalekohled*. Uvažujte dvě tenké čočky o mohutnostech φ_{ob} , φ_{ok} oddělené vzduchovou mezerou tloušťky l . Pomocí maticového formalizmu nalezněte podmínku, za které bude systém pracovat jako hvězdářský dalekohled (čili zobrazovat rovnoběžné svazky na rovnoběžné svazky) a určete zvětšení β takového dalekohledu. Předpokládejte, že objektiv je spojka, okulár může být spojka (Kepler), nebo rozptylka (Galilei). Zkonstruujte chod paprsků oběma typy hvězdářského dalekohledu.

$$[l = f_{\text{ob}} + f_{\text{ok}}, \beta = f_{\text{ob}} / f_{\text{ok}}]$$

4.5* *Optický zoom*. Objektiv s proměnnou ohniskovou vzdáleností (transfokátor) se v nejjednodušší konfiguraci skládá ze tří skupin o mohutnostech φ_1 , φ_2 , φ_3 , které se všechny mohou nezávisle pohybovat podél optické osy objektivu. Nalezněte vztahy pro polohy jednotlivých členů objektivu v závislosti na požadované celkové mohutnosti objektivu za dodržení podmínky, že transfokace (změna ohniskové vzdálenosti objektivu) nemá vliv na zaostření objektivu.

□

5. **Fresnelovy vztahy**. Uvažujte rovinné rozhraní mezi dvěma homogenními prostředími o indexech lomu (po řadě) n_1 a n_2 . Odrazivosti takového rozhraní pro světlo polarizované v rovině dopadu (p) a kolmo na ni (s) jsou

$$r_p = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \quad r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t},$$

přičemž úhel dopadu θ_i a lomu θ_t jsou svázány Snellovým zákonem $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$. Pomocí r_s , r_p se zjistí amplitudy odražených vln, $E_{rs} = r_s E_0$, $E_{rp} = r_p E_0$, kde E_0 je amplituda dopadající vlny. Odražené intenzity světla se zjistí pomocí $R_p = |r_p|^2$, $R_s = |r_s|^2$ jako $I_{rp} = R_p I_0$, $I_{rs} = R_s I_0$, kde $I_0 = |E_0|^2$ je světelná intenzita dopadající vlny.

- Nalezněte kritický úhel dopadu θ_c , pro nějž (a nad nímž) dochází k totálnímu odrazu světla od rozhraní.

$$\left[\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}, (n_1 \geq n_2) \right]$$

- Pro neabsorbující prostředí nalezněte Brewsterův úhel dopadu θ_B , kdy je odražené světlo zcela polarizováno.

$$\left[\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow R_p = 0 \right]$$

- Nalezněte koeficient odrazivosti R v případě (skoro) kolmého dopadu světla na rozhraní a z podmínky $R + T = 1$ také koeficient propustnosti T . Ukažte, že získané vztahy nezávisí na polarizaci dopadajícího světla ani na pořadí prostředí.

$$\left[R = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}, T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \right]$$

6. **Interference.** Uvažujte planparalelní desku toušičky d a indexu lomu n' , vnořenou do prostředí o indexu lomu n . Předpokládejte, že na desku dopadá světlo intenzity I_0 pod obecným úhlem dopadu a že na stěnách desky dochází k násobným odrazům. Pro jednoduchost na obou rozhraních předpokládejte koeficient odrazu R a koeficient propustnosti T .

- ukažte, že paprsky vystupující z desky jsou rovnoběžné s dopadajícím paprskem nezávisle na úhlu dopadu světla
- určete intenzity několika prvních prošlých i odražených paprsků

□

6.1 V rámci konkrétního výpočtu dále předpokládejte skleněnou destičku ($n'=1.5$) ponořenou do vzduchu ($n=1$) a skoro kolmý dopad světla. S použitím příslušně zjednodušených Fresnelových vztahů vypočtete celkovou prošlou (I_t) a odraženou (I_r) intenzitu světla včetně násobných odrazů a ověřte, že jejich součet je roven I_0 .

$$\left[I_t = \frac{2n'}{1+n'^2} I_0 \right]$$

6.2 Řešte stejný příklad interferenčně: předpokládejte, že deska je navíc tenká a započtete i fázové členy.

□

7. Difrakce.

7.0 *Youngův experiment.* Uvažujte neprůhledný terčík se dvěma úzkými rovnoběžnými šterbinami, vzdálenými d . Na terčík kolmo dopadá rovinná monochromatická vlna (z dalekého monochromatického bodového zdroje). Určete rozložení světla na stínítku rovnoběžném s terčíkem ve vzdálenosti l po směru letu světla; úlohu řešte jako 1D příklad.

7.1 **Fraunhoferova difrakce.** Předpokládejte difrakci na rovinném terčíku s obecným otvorem Σ . Zdrojem světla je bodový monochromatický zářič S , centrováný před terčíkem ve vzdálenosti a a difrakci pozorujeme v bodě $P(\xi, \eta)$ na rovinném stínítku rovnoběžném s terčíkem ve vzdálenosti b za ním po směru letu světla. Za zjednodušujícího předpokladu konstantní intenzity světla na terčíku je difrakční příspěvek $\psi(P)$ v bodě P , plynoucí z Huygensova-Fresnelova principu, roven

$$\psi(P) = A \iint_{Q \in \Sigma} \frac{K(\chi)}{SQ \cdot QP} \exp(i[\omega t - k(SQ + QP)]) d\Sigma,$$

kde $K(\chi) = i/\lambda$ je faktor sklonu a A je amplituda zdroje.

- Naleznete vyjádření difrakčního integrálu v lineární aproximaci terčíkových souřadnic $Q(x, y)$; vzdálenosti QP aproximujte konstantní vzdáleností $r_0 \equiv Q_0P$ ke středu Q_0 otvoru terčíku.

$$\left[\psi(P) \doteq A_D \iint_{Q \in \Sigma} \exp\left(ik \frac{x\xi + y\eta}{r_0}\right) d\Sigma, \quad A_D = \frac{i}{\lambda ab} \exp\left(i[\omega t - k(a + r_0)]\right) \right]$$

7.1 S využitím Fraunhoferova integrálu vypočtete difrakci na centrovaném obdélníkovém otvoru o velikosti $p \times q$. Určete polohy maxim a šířku centrálního maxima.

$$\left[\psi(\xi, \eta) = A_D pq \operatorname{sinc}\left(\frac{kp\xi}{2r_0}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{kq\eta}{2r_0}\right), \quad I_{pq} = \psi\psi^* \right]$$

7.2 S využitím Fraunhoferova integrálu spočtete Youngův experiment realističtěji jako difrakci na centrované dvojici totožných obdélníkových otvorů o velikosti $p \times q$, vzdálených od sebe o $d > p$ podél osy x .

$$\left[I(\xi, \eta) = 4I_{pq} \cos^2(kd\xi/2r_0) \right]$$

7.4 *Mřížkový faktor.* Demonstrujte, že při difrakci na pravidelně se opakujících otvorech stejného tvaru se výsledná intenzita ve Fraunhoferově přiblížení dá počítat jako součin difrakce na jednom z otvorů (otvorový faktor) a funkce závislé na rozložení otvorů na terčíku (mřížkový faktor). Pro jednoduchost vyjděte z předchozího příkladu a uvažujte M ekvidistantně vzdálených obdélníkových otvorů o velikosti $p \times q$.

$$\left[I(\xi, \eta) = I_{pq} \left| \sum_{m=1}^M \exp(-ikdm\xi/r_0) \right|^2 = I_{pq} \left(\frac{\sin(kdM\xi/2r_0)}{\sin(kd\xi/2r_0)} \right)^2 \right]$$

7.3 Difrakce na kruhovém otvoru. Přejděte na terčíku a stínítku do polárních souřadnic a vypočtete difrakci na centrovaném kruhovém otvoru o poloměru R .

$$\left[I(\rho) = |A_D \pi R^2|^2 \left(\frac{2J_1(kR\rho/r_0)}{kR\rho/r_0} \right)^2, \quad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 \right]$$

8. Aplikace.

8.1 Podle Gullstrandova–Le Grandova modelu oka má rohovka tloušťku 0.55 mm a index lomu 1.3771. Určete dobu, za kterou projde rohovkou tam a zpět (po odrazu od zadní stěny) signál a) ultrazvuku ($v \doteq 1500$ m/s), b) světelný.

□

8.2 *Dvojlom.* Předpokládejte planparalelní desku vyrobenou z křemene, indexy lomu řádného a mimořádného paprsku v křemenu jsou po řadě $n_o = 1.544$ a $n_e = 1.553$. Uvažujte kolmo dopadající světlo a vypočtete fázový rozdíl řádného a mimořádného paprsku při průchodu deskou tloušťky L a

- určete nejmenší tloušťku desky, při které se bude chovat jako čtvrtvlnná (způsobí fázový rozdíl $\pi/2$ mezi řádným a mimořádným paprskem a tedy změní dopadající lineární polarizaci světla na kruhovou) a jako půlvlnná (způsobí fázový rozdíl π a změní orientaci lineárně polarizovaného světla na kolmou)
- zjistěte, jaké tloušťky desky jsou k dispozici, má-li půlvlnná destička mít tloušťku kolem 1 mm.

□

8.2* *Antireflexní vrstva.* Předpokládejte tlustou planparalelní desku o indexu lomu n_1 , na které je nanášena tenká vrstva materiálu o indexu lomu n_2 . Pro světlo dopadající kolmo ze strany tenké vrstvy určete celkovou intenzitu I_t prošlého světla deskou; uvažujte násobné odrazy pouze uvnitř tenké vrstvy, fázové členy však zanedbejte. Určete n_2 , které množství prošlého světla maximalizuje a porovnejte získanou hodnotu s příkladem 6.1 samotné desky.

$$\left[\frac{I_t}{I_0} = \frac{16n_1^2 n_2}{(n_1 + 1)^3 (n_1 + n_2^2)}, n_2 = \sqrt{n_1}, \text{ pro } n_1 = 1.5: \frac{0.94}{0.92} \right]$$