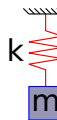


## A. KMITY

0.0 Uvažujte malé těleso o hmotnosti  $m$ , zavěšené na nehmotné pružině o tuhosti  $k$ . Souřadnice  $x$  nechť směřuje svisle vzhůru, stranový pohyb neuvažujte. Určete protažení pružiny způsobené tíhovým polem  $\vec{g}$  Země.

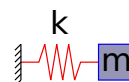
$$[\Delta x = -mg/k]$$



0.1 Ukažte, že hmotný bod podrobený konzervativní síle bude v přiblížení malých výchylek vykonávat harmonické oscilace kolem rovnovážné polohy  $x_0$ ; uvažujte jednorozměrný případ. Frekvenci kmitů určete. (Nápověda: využijte skutečnosti, že konzervativní síly lze vždy vyjádřit pomocí potenciálu.)

$$\left[ \frac{dp}{dt} = -\text{grad}U, U'(x_0) = 0; \omega^2 = \frac{U''(x_0)}{m} \right]$$

1. **Volné kmity.** Uvažujte malé těleso o hmotnosti  $m$  připevněné k nehmotné pružině o tuhosti  $k$ , která je na druhém konci pevně uchycena. Uvažujte pouze pohyb ve směru pružiny, tíhové pole Země zanedbejte.



- Sestavte pohybovou rovnici uvažovaného oscilátoru se započtením odporu prostředí ( $\vec{F}_o = -\beta\dot{x}$ ,  $\beta \geq 0$ ). Pohybovou rovnici řešte s využitím ansatzu  $x = \exp(\lambda t)$  a pro  $\beta = 0$  naleznete její obecné řešení a stanovte frekvenci  $\omega_0$  netlumených kmitů.

$$\left[ \lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4mk}}{2m}; \quad x = A \sin(\omega_0 t + \phi_0), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \right]$$

- Diskutujte možné typy pohybu závaží a porovnejte frekvenci kmitů  $\omega_t$  podkriticky tlumeného závaží s případem oscilátoru netlumeného.

$$\left[ \beta^2 - 4mk < 0: \quad \omega_T \leq \omega_0, \omega_T^2 = \omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4m^2} \right]$$

1.1 Určete integrační konstanty pro netlumený oscilátor s počátečními podmínkami  $x(0) = x_0$  a  $\dot{x}(0) = v_0$ .

$$\left[ x = A \sin(\omega t + \phi_0); \tan \phi_0 = \frac{x_0}{v_0/\omega}, A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \right]$$

1.2 U netlumených kmitů s frekvencí 25 Hz byla v čase  $t_1 = 0$  s pozorována výchylka  $x_1 = 56$  mm a v čase  $t_2 = 10$  ms výchylka  $x_2 = -33$  mm. Určete amplitudu kmitů a fázovou konstantu (fázi v  $t = 0$  s).

$$[A \cos(\omega t + 30^\circ 30'), A = 65 \text{ mm}]$$

1.3 Malé závaží o hmotnosti  $m = 100$  g je zavěšeno na pružině o tuhosti  $k = 20$  N/m. Celá soustava je umístěna v odporujícím prostředí se silou odporu  $F_o = -b\dot{x}$ ,  $b = 1$  Ns/m. Naleznete výchylku a rychlost závaží v čase  $t = 0.05$  s, víte-li, že na počátku mělo závaží výchylku  $x(0) = 20$  mm a bylo v klidu.

□

1.5 *Matematické kyvadlo.* Uvažujte malé závaží o hmotnosti  $m$  zavěšené na nehmotném pevném lanku délky  $l$  v tíhovém poli  $\vec{g}$  Země. Pro případ volného pohybu závaží ve svislé rovině naleznete pohybovou rovnici pro úhlovou výchylku  $\varphi$  kyvadla. Naleznete frekvenci kyvadla v aproximaci malých výchylek.

$$\left[ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0; \quad \omega^2 \doteq \frac{g}{l} \right]$$

1.6\* *Parametrické oscilace.* Ukažte, že houpačku je možné rozhoupat (vhodným) kýváním nohou. Konkrétně uvažujte model matematického kyvadla s časově závislou frekvencí vlastních kmitů  $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t)x = 0$ : zvedání a spouštění nohou periodicky mění polohu těžiště a tím délku závěsu; tento efekt lze shrnout do uvedené periodické modulační frekvence houpačky. Uvažujte modulaci s malou hloubkou,  $h \ll 1$ , a ukažte, že při přibližně dvojnásobné frekvenci modulační,  $\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll \omega_0$  dochází k exponenciálnímu rozkmitu houpačky.

2. **Nucené kmity.** Uvažujte malé těleso o hmotnosti  $m$ , zavěšené na nehmotné pružině o tuhosti  $k$ . Souřadnice  $x$  necht' směřuje svisle vzhůru, stranový pohyb neuvažujte. Uvažujte odpor prostředí ( $\vec{F} = -\beta\dot{x}$ ,  $\beta \geq 0$ ), tíhové pole Země zanedbejte. Těleso necht' je podrobena budící síle  $F \sin(\Omega t)$ .

- Ukažte, že pro  $t \rightarrow \infty$  hraje roli pouze partikulární řešení soustavy.
- Předpokládejte partikulární řešení ve tvaru  $y_p = A \sin(\Omega t + \Phi)$  a určete jeho volné konstanty  $A$ ,  $\Phi$ .

$$\left[ A = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2 \beta^2}{m^2}}}, \tan \Phi = -\frac{\Omega \beta / m}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right]$$

- Naleznete rezonanční frekvenci  $\Omega_r$ , tedy frekvenci, při které těleso dosahuje největších výchylek pro dané  $F$ ; velikost  $A_{\max}$  rezonanční amplitudy vypočtete.

$$\left[ \Omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2m^2}, A_{\max} = \frac{F/\beta}{\omega_T} \right]$$

- Načrtněte závislost  $A(\Omega)$  pro dvě různé hodnoty  $\beta_2 \gg \beta_1$  a na vodorovné ose vyznačte vztah  $\Omega_r$ ,  $\omega_t$  a  $\omega_0$ . Jako pomocnou veličinu pro konstrukci grafu určete pološířku  $\Omega_{1/2}$  z podmínky  $A(\Omega_{1/2}) = A_{\max}/2$ .

$$\left[ \Omega_{1/2} = \Omega_r \pm \sqrt{3} \frac{\beta}{m} \omega_T \right]$$

2.1 Závaží se pohybuje pod vlivem potenciálu  $V(x) = V_0 \cosh(x/a)$ , kde  $V_0$  a  $a$  jsou konstanty. Naleznete rovnovážnou polohu  $x_0$  závaží a ukažte, že frekvence malých kmitů kolem této polohy se shoduje s frekvencí volných kmitů závaží, připevněného na pružinu o tuhosti  $V_0/a^2$ .

$$[x_0 = 0]$$

2.2\* Uvažujte tlumený oscilátor buzený obecnou periodickou silou  $F(t)$ . Rozviňte  $F(t)$  do Fourierovy řady a s využitím linearit pohybové rovnice ukažte, že jejím řešením je trajektorie  $x(t) = \sum_j (\alpha_j c_j(t) + \beta_j s_j(t))$ , kde  $\alpha_j$  a  $\beta_j$  jsou konstanty a  $c_j$  a  $s_j$  jsou (po řadě) řešení rovnic s pravými stranami obsahujícími  $\cos(\omega_j t)$  a  $\sin(\omega_j t)$ .

3. **Složené kmity.** Uvažujte nezávislé oscilace  $x = A_x \sin(\omega_x t + \phi_x)$ ,  $y = A_y \sin(\omega_y t + \phi_y)$  v rovině  $xy$ .

- Vyloučením času z obou rovnic naleznete možné polarizační stavy světla, víte-li, že Maxwellovy rovnice připouští nejobecněji řešení  $\omega_x = \omega_y$ ; bez újmy na obecnosti předpokládejte  $\phi_y = 0$ .

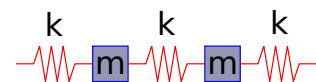
$$\left[ \left( \frac{x}{A_x} \right)^2 - 2 \frac{x}{A_x} \frac{y}{A_y} \cos \phi_x + \left( \frac{y}{A_y} \right)^2 = \sin^2 \phi_x \right]$$

- Naleznete obecnou rovnici *Lissajousovy křivky* pro případ soudělných frekvencí  $\omega_x = 2\omega_y$ ; bez újmy na obecnosti předpokládejte  $\phi_y = 0$ . Diskutujte speciální případy  $\phi_x = 0$  a  $\phi_x = \pi/2$  ve zjednodušeném případě  $A_x = A_y = 1$ .

$$\left[ \left( \frac{x}{A_x} \right)^2 + \left( 1 - 2 \frac{y^2}{A_y^2} \right)^2 - 2 \frac{x}{A_x} \left( 1 - 2 \frac{y^2}{A_y^2} \right) \sin \phi_x = \cos^2 \phi_x \right]$$

3.1\* *Chaos.* Naleznete rovnice popisující pohyb dvojitého kyvadla. Pro jednoduchost předpokládejte spojená dvě identická matematická kyvadla, umožňující pouze rovinný pohyb. Získané rovnice nemají analytické řešení - pohyb koncového bodu je chaotický, jak se lze přesvědčit numerickou simulací.

4. **Vázané kmity.** Uvažujte sadu  $N$  stejných malých závaží o hmotnosti  $m$ , spojených lineárně identickými nehmotnými pružinami o tuhosti  $k$ ; předpokládejte pohyb pouze ve směru pružin. Počátky souřadnic  $x[i]$ , popisujících výchylky jednotlivých závaží umístěte do rovnovážných poloh příslušných závaží.



- Pro  $N=3$  sestavte pohybové rovnice soustavy pro případ, že koncová závaží jsou a) volná, b) uchycena k pevným stěnám dvěma dalšími pružinami týchž vlastností, c) podrobena periodické okrajové podmínce  $x[i+3] \equiv x[i]$ .

$$\left[ m\ddot{\mathbf{x}} = k \begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ 1 & -2 & 1 \\ & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, m\ddot{\mathbf{x}} = k \begin{pmatrix} -2 & 1 & \\ 1 & -2 & 1 \\ & 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, m\ddot{\mathbf{x}} = k \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \right]$$

- Sestavte pohybové rovnice předchozího příkladu s využitím potenciálu.

$$\left[ U = \frac{1}{2}k(x[1]-x[2])^2 + \frac{1}{2}k(x[2]-x[3])^2 + \frac{1}{2}k(x[3]-x[1])^2 \right]$$

- Za předpokladu  $N=2$  a pružného uchycení koncových závaží k vnějším pevným stěnám vyřešte pohybové rovnice využitím ansatzu  $x[i] = A_i \exp(\lambda t)$ ; nalezněte přípustné frekvence kmitů soustavy a jim odpovídající výchylky závaží.

$$[\omega^2 = k/m, A_1 = A_2; \omega^2 = 3k/m, A_1 = -A_2]$$

4.1\* Pohybové rovnice soustavy  $N$  hmotných bodů s hmotnostmi  $m_i$  v aproximaci elastického pole vedou na zobecněný problém vlastních hodnot  $\mathbf{K}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{x}$ ,  $\dim K = \dim M = 3N$ , kde  $\mathbf{K}$  je matice silových konstant a  $\mathbf{M}$  je matice hmotností (diagonální matice se ztrojenými hmotnostmi). Ukažte, že pohybové rovnice lze převést na standardní problém vlastních hodnot  $\mathbf{K}\mathbf{q} = \lambda\mathbf{q}$  transformací  $\mathbf{q}_i = \sqrt{\mathbf{M}_i} \mathbf{x}_i$ .

## 5. Aplikace

5.1 *RLC obvod.* Sestavte druhý Kirchhoffův zákon pro RLC obvod, buzený střídavým napětím  $-U_0 \cos(\omega t)$ .

- Ukažte, že časová závislost průběhu proudu v RLC obvodu odpovídá tlumenému buzenému oscilátoru. Které ze součástek jsou zodpovědné za útlum v idealizovaném a reálném RLC obvodu?

$$\left[ U_r = RI, U_l = L\dot{I}, U_c = Q/C \right]$$

- Nalezněte vztah pro vlastní frekvenci RLC obvodu a určete její hodnotu pro praktický příklad: 400 závitů měděného drátu o průměru 0.063 mm na magnetické pásce 4mm x 13mm ( $L=450 \mu\text{H}$ ), kondenzátor 47 pF a odpor 1,5 k $\Omega$ .

$$\left[ \omega_0 = 1/\sqrt{LC}, f = 1\,094 \text{ kHz} \right]$$

- Využitím předpokladu  $I = A \sin(\omega t + \Phi)$  řešte rovnici RLC obvodu a vysvětlete, jak může být RLC obvod použit coby přijímací anténa radiového vysílání.

$$\left[ A = U_0 / \sqrt{\frac{1}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} + R^2}, \tan \Phi = \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \right]$$

5.2 *Molekuly.*

- Určete tuhost vazby intersticiálního kyslíku  $^{16}\text{O}$  v křemíku, víte-li že vibruje na frekvenci  $f = 33,2 \text{ THz}$ . Na jaké frekvenci bude vibrovat ve stejné pozici izotop  $^{18}\text{O}$ , předpokládáme-li, že tuhost vazby se nezmění?

$$\left[ k = 1\,156 \text{ kg s}^{-2}, \omega_{18}/\omega_{16} = \sqrt{8/9} \right]$$

- Potenciální energie HCl má průběh

$$V(r) \doteq -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{B}{r^9}.$$

S využitím příkladu 0.0 odhadněte vlnočet  $1/\lambda$  vibrací této molekuly. Rovnovážná délka vazby H-Cl je  $r_0 = 0,13 \text{ nm}$ , pro výpočet použijte redukovanou hmotnost  $\mu$  molekuly.

$$\left[ V'(r_0) = 0: B = r_0^8 e^2 / (36\pi\epsilon_0), \omega^2 = V''(r_0) / \mu: 1/\lambda = 3790 / \text{cm} \right]$$

5.2\* *Torzní kmity.*