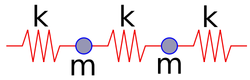
D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

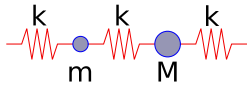
B. VLNY

1. **1D řetízek** identických **atomů** interagujících elasticky vždy pouze s nejbližšími sousedy lze aproximovat sadou stejných malých závaží o hmotnosti m, spojených lineárně identickými nehmotnými pružinami o tuhosti k. Rovnovážná vzdálenost sousedních závaží nechť je a, výchylky $x[j]$ jednotlivých závaží uvažujte od jejich rovnovážných poloh. Předpokládejte pohyb pouze ve směru pružin (tíhové působení zanedbejte).



   - Předpokládejte periodické okrajové podmínky (délka opakujícího se motivu řetízku je Na) a specifikujte jejich vliv na předpokládaný tvar řešení $x[j]=\tau^j$.
   $\left[\tau=\exp(\mathrm{i}k_n a), k_n=\frac{2\pi n}{l}\right]$
   - Pro studovaný periodický řetízek řešte pohybové rovnice využitím ansatzu $x[j]=\tau^j$; nalezněte disperzní relaci pro vlnu v tomto řetízku.
   $\left[x_n[j]\propto\exp(\mathrm{i}[\omega_n t+k_n a j]);\ \ \omega_n^2=4\omega_0^2\sin^2\frac{k_n a}{2}\right]$
   - Spočtěte grupovou a fázovou rychlost šíření vln v uvažovaném periodickém řetízku.
   $[v_\mathrm{f}=a\omega_0\mathrm{sinc}(ka/2), v_\mathrm{g}=a\omega_0\cos(ka/2)]$

1.1 Nalezněte všechny větve disperzní relace pro 1D řetízek střídajících se atomů o dvou různých hmotnostech m a M; tuhost všech vazeb uvažujte k, vzdálenost sousedních atomů stejné hmotnosti nechť je a. Pro výchylky $x[j]$, $X[j]$ v subřetízcích atomů stejné hmotnosti předpokládejte řešení ve tvaru $x[j],X[j]\propto\exp(\mathrm{i}[\omega t+kaj])$.



$$\left[\omega^2=k\left(\frac{1}{\mu}\pm\sqrt{\frac{1}{\mu^2}-\frac{4}{mM}\cos^2(ka/2)}\right), \mu=\frac{mM}{m+M}\right]$$

1.2* *Blochův teorém.* Ukažte, že frekvence kmitů nekonečného homogenního řetízku se shodují s vlastními hodnotami τ translační matice T,

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že působením translační matce na vektor výchylek jednotlivých atomů se posuneme o jednu pozici podél řetízku. Nalzněte matice, které způsobí posun podél řetízku o dvě pozice, a o jednu pozici opačným směrem. Ukažte, že pro vlastní vektory dynamické matice (a tedy i pro výchylky podél řetízku) platí $x[j]\propto\tau^j$.

2. **Vlnová rovnice.** Uvažujte nekonečný řetízek stejných malých závaží o hmotnosti m, spojených lineárně identickými nehmotnými pružinami o tuhosti k. Rovnovážná vzdálenost sousedních závaží nechť je a, a předpokládejte pohyb pouze ve směru pružin. Pole výchylek jednotlivých závaží z jejich rovnovážných poloh popište spojitou veličinou $u(x)$, čili $u[j]\equiv u(x[j])=0$ prochází-li závaží rovnovážnou polohou.

   - Sestavte pohybové rovnice pro i-té závaží a ukažte, že za předpokladu $a\to 0$ tyto pohybové rovnice přechází v rovnici vlnovou.
   $[m\ddot{u}_i=k(u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}), \ddot{u}-v^2u''=0, v^2=ka^2/m]$

2.1 Ukažte, že $f(\omega t\pm\mathbf{kx})$ může být řešením vlnové rovnice pro libovolné f.
$[\text{pokud}\ \ v\equiv v_\mathrm{f}]$

2.2 *Helmholtzova rovnice.* Ukažte, že ve stacionárním případě $u(\mathbf{x},t)=\sum_i U_i(\mathbf{x})\exp(\mathrm{i}\omega_i t)$ se vlnová rovnice redukuje na Helmholtzovy rovnice $\Delta U_i+k_i^2U_i=0$.
$[\omega_i^2=v_\mathrm{f}|\mathbf{k}|^2]$

3. **Aplikace**

3.1 *Tíhové vlny* na hluboké vodě mají disperzní relaci $\omega = \sqrt{gk}$, kde g je tíhové zrychlení. Spočtěte fázovou a grupovou rychlost šíření tíhových vln a tyto rychlosti vzájemně porovnejte.

$\left[v_{\mathrm{f}} = \sqrt{g/k}, v_{\mathrm{g}} = \sqrt{g/k}/2; v_{\mathrm{g}} < v_{\mathrm{f}}\right]$

3.2 *Kapilární vlny* mají disperzní relaci $\omega = \sigma k^3/\varrho$, kde σ je povrchové napětí kapaliny a ϱ její hustota. Spočtěte fázovou a grupovou rychlost šíření kapilárních vln a tyto rychlosti vzájemně porovnejte.

$\left[v_{\mathrm{f}} = \sigma k^2/\varrho, v_{\mathrm{g}} = 3\sigma k^2/\varrho; v_{\mathrm{g}} > v_{\mathrm{f}}\right]$