D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

2. **Nucené kmity.** Uvažujte malé těleso o hmotnosti m, zavěšené na nehmotné pružině o tuhosti k. Souřadnice x nechť směřuje svisle vzhůru, stranový pohyb neuvažujte. Uvažujte odpor prostředí ($F_{\mathrm{odp}}{=}-\beta\dot{x}$, $\beta{\geq}0$), tíhové pole Země zanedbejte. Těleso nechť je podrobeno budící síle $F\sin(\Omega t)$.

Vyjdeme z II. Newtonova zákona pro tlumené závaží:

$$m\ddot{x} = \sum_i \mathbf{F_i} \equiv -kx - \beta\dot{x} + F\sin(\Omega t),$$

kde poslední člen odpovídá budící síle; rovnici si přepíšeme do tvaru

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F\sin(\Omega t).$$

Předpokládejme nyní, že celkové hledané řešení x se skládá z řešení x_{h} homogenní rovnice a partikulárního řešení x_{p} odpovídajícího pravé straně, $x{=}x_{\mathrm{h}}{+}x_{\mathrm{p}}$. Dosazením dostáváme

$$(m\ddot{x}_{\mathrm{h}} + \beta\dot{x}_{\mathrm{h}} + kx_{\mathrm{h}}) + (m\ddot{x}_{\mathrm{p}} + \beta\dot{x}_{\mathrm{p}} + kx_{\mathrm{p}}) = F\sin(\Omega t)$$

První závorka je z podstaty věci nulová, takže zůstává

$$m\ddot{x}_{\mathrm{p}} + \beta\dot{x}_{\mathrm{p}} + kx_{\mathrm{p}} = F\sin(\Omega t).$$

Poznámka: Jelikož se homogenní řešení zatlumuje (β: $t{\to}\infty{\Rightarrow}x_h{\to}0$), v ustáleném stavu bude hrát roli pouze partikulární řešení.

2. **Nucené kmity.** Uvažujte malé těleso o hmotnosti m, zavěšené na nehmotné pružině o tuhosti k. Souřadnice x nechť směřuje svisle vzhůru, stranový pohyb neuvažujte. Uvažujte odpor prostředí ($F_{\mathrm{odp}}{=}{-}\beta\dot{x}$, $\beta{\geq}0$), tíhové pole Země zanedbejte. Těleso nechť je podrobeno budící síle $F\sin(\Omega t)$.

Pokusíme se nyní nalézt partikulární řešení:

$$m\ddot{x}_{\mathrm{p}} + \beta\dot{x}_{\mathrm{p}} + kx_{\mathrm{p}} = F\sin(\Omega t).$$

Zvolme $x_{\mathrm{p}}{=}A\sin(\Omega t{+}\Phi)$. Dosazením získáme algebraickou rovnici

$$[-m\Omega^2 + k]\sin(\Omega t + \Phi) + \beta\Omega\cos(\Omega t + \Phi) = \frac{F}{A}\sin(\Omega t).$$

Levou stranu lze převést na goniometrickou identitu pro sinus součtu dvou úhlů,

$$\sqrt{\beta^2\Omega^2 + (k - m\Omega^2)^2}\left[\frac{k - m\Omega^2}{\sqrt{\beta^2\Omega^2 + (k - m\Omega^2)^2}}\sin(\Omega t + \Phi) + \frac{\beta\Omega}{\sqrt{\beta^2\Omega^2 + (k - m\Omega^2)^2}}\cos(\Omega t + \Phi)\right] = \frac{F}{A}\sin(\Omega t),$$

odkud

$$\sqrt{\beta^2\Omega^2 + (k - m\Omega^2)^2}\sin\left(\Omega t + \Phi + \operatorname{arc\,tan}\frac{\beta\Omega}{k - m\Omega^2}\right) = \frac{F}{A}\sin(\Omega t).$$

2. **Nucené kmity.** Uvažujte malé těleso o hmotnosti m, zavěšené na nehmotné pružině o tuhosti k. Souřadnice x nechť směřuje svisle vzhůru, stranový pohyb neuvažujte. Uvažujte odpor prostředí ($F_{\mathrm{odp}}=-\beta\dot{x}$, $\beta\geq 0$), tíhové pole Země zanedbejte. Těleso nechť je podrobeno budící síle $F\sin(\Omega t)$.

Nyní zbývá již jen porovnat levou a pravou stranu. Rovnice

$$\sqrt{\beta^2\Omega^2+(k-m\Omega^2)^2}\sin\left(\Omega t+\Phi+\operatorname{arc}\tan\frac{\beta\Omega}{k-m\Omega^2}\right)=\frac{F}{A}\sin(\Omega t).$$

bude rozřešena, pokud

$$\Phi+\operatorname{arc}\tan\frac{\beta\Omega}{k-m\Omega^2}=0 \qquad \text{a} \qquad \frac{F}{A}=\sqrt{\beta^2\Omega^2+(k-m\Omega^2)^2}.$$

Drobnými úpravami

$$\tan\Phi=-\frac{\beta\Omega/m}{\omega_0^2-\Omega^2} \qquad \text{a} \qquad A=\frac{F/m}{\sqrt{\dfrac{\beta^2\Omega^2}{m^2}+(\omega_0^2-\Omega^2)^2}}.$$

Povšimněme si, že obě veličiny závisí na budící frekvenci.