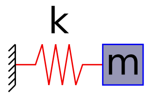
D. Hemzal
hemzal@physics.muni.cz

1. **Volné kmity.** Uvažujte malé těleso o hmotnosti m připevněné k nehmotné pružině o tuhosti k a klidové délce l_0, která je na druhém konci pevně uchycena. Uvažujte pouze pohyb ve směru pružiny, tíhové pole Země zanedbejte.



Vyjdeme z první impulzové věty pro hmotný bod

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{F_i}$$

a z definice hybnosti $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$:

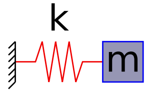
$$\dot{m}\mathbf{v} + m\dot{\mathbf{v}} = \sum_i \mathbf{F_i}.$$

Pro soustavy, které nemění svou hmotnost, $\dot{m}=0$ pak obdržíme II. Newtonův zákon

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \sum_i \mathbf{F_i},$$

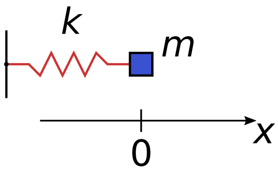
svazující pohyb částice s výslednicí sil, působící na tělísko.

1. **Volné kmity.** Uvažujte malé těleso o hmotnosti m připevněné k nehmotné pružině o tuhosti k a klidové délce l_0, která je na druhém konci pevně uchycena. Uvažujte pouze pohyb ve směru pružiny, tíhové pole Země zanedbejte.



$$m\ddot{\mathbf{x}} = \sum_i \mathbf{F_i}$$

Jaké síly se podílí na výslednici?



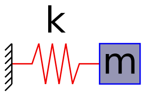
$$F = -kx$$

$$F = -k(l - l_0)$$

pro $l = l_0 + x$ se vracíme k předchozímu

Odporová síla: $F_o = -\beta\dot{x}$.

1. **Volné kmity.** Uvažujte malé těleso o hmotnosti m připevněné k nehmotné pružině o tuhosti k a klidové délce l_0, která je na druhém konci pevně uchycena. Uvažujte pouze pohyb ve směru pružiny, tíhové pole Země zanedbejte.



Sloučením známých sil obdržíme

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x},$$

neboli

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0.$$

Jedná se o lineární diferenciální rocnici druhého řádu, rozřešíme ji s využitím vhodného ansatzu.

$x{=}\exp(\lambda t)$: $\quad \dot{x}{=}\lambda x$, $\ddot{x}{=}\lambda^2 x$

$$\exp(\lambda t)\left[m\lambda^2 + \beta\lambda + k\right] = 0,$$

odkud

$$\lambda^2 + \frac{\beta}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

s kořeny

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}.$$

$x{=}\exp(\mathrm{i}\omega t)$: $\quad \dot{x}{=}\mathrm{i}\omega x$, $\ddot{x}{=}-\omega^2 x$

$$\exp(\mathrm{i}\omega t)\left[-m\omega^2 + \mathrm{i}\beta\omega + k\right] = 0,$$

odkud

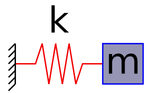
$$\omega^2 + -\mathrm{i}\frac{\beta}{m}\omega - \frac{k}{m} = 0$$

s kořeny

$$\omega_{1,2} = \mathrm{i}\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}},$$

a tedy $\omega_0^2{=}k/m$.

1. **Volné kmity.** Uvažujte malé těleso o hmotnosti m připevněné k nehmotné pružině o tuhosti k a klidové délce l_0, která je na druhém konci pevně uchycena. Uvažujte pouze pohyb ve směru pružiny, tíhové pole Země zanedbejte.



Již víme, že

$$\omega_{1,2} = \mathrm{i}\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4m^2}}, \qquad \omega_0^2 = k/m,$$

neboli

$$\omega_{1,2} = \mathrm{i}\frac{\beta}{2m} \pm \omega_{\mathrm{T}}, \qquad \text{kde } \omega_{\mathrm{T}}^2 = \omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4m^2}.$$

Zpětné dosazení, $x{=}\exp(\mathrm{i}\omega t)$:

$$x = \exp\left(\frac{-\beta}{2m}t\right)\left[A\exp\left(\mathrm{i}\omega_{\mathrm{T}}t\right) + B\exp\left(-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{T}}t\right)\right], \qquad \text{kde } A, B \in \mathbb{C}.$$

Výchylka ovšem musí být reálná, komplexními čísly si jen pomáháme:
$x{\in}R{\to}B{=}A^*$, zvolíme $A{=}X\exp(\mathrm{i}\phi)$, $X,\phi{\in}\mathbb{R}$:

$$x = X\exp\left(\frac{-\beta}{2m}t\right)\cos(\omega_{\mathrm{T}}t + \phi).$$