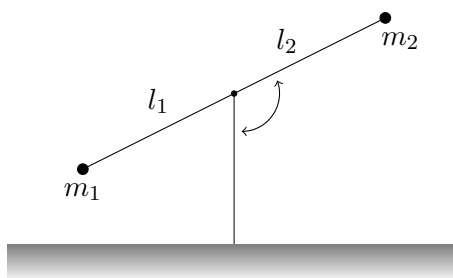


Šikmý vrh Mimoszemšťan o hmotě m skáče na povrchu Měsíce. Pomocí aparátu analytické mechaniky vypočtete co nejobecnější parametrickou křivku popisující jeho pohyb. (15. října 2020¹)

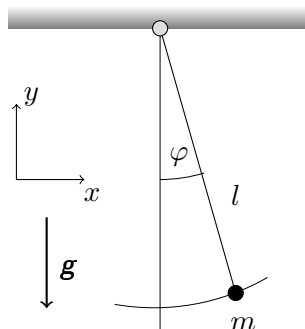
Harmonický oscilátor Odvoďte pohybové rovnice harmonického oscilátoru přímou variací akce, tj. bez použití Euler-Lagrange rovnic. (15. října 2020)

Zahradní houpačka Na obrázku vidíme zahradní houpačku. Vypočtete pohybové rovnice hmotných bodů na koncích a určete podmínku rovnováhy. (23. října 2020)



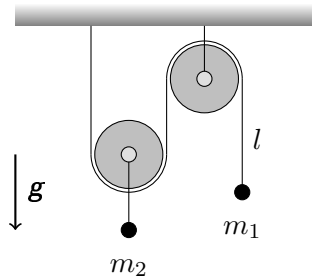
Kyvadlo a Langrangeovy multiplikátory Rovinné kyvadlo s hmotou m je zavěšeno na tenkém vlákně o délce l . Systém je umístěn v homogenním gravitačním poli. Vypočtete pohybové rovnice kyvadla dvěma metodami:

1. Zavedením zobecněných souřadnic.
2. Pomocí metody Langrangeových multiplikátorů. Ověřte, že obě metody řešení si navzájem odpovídají. Tento postup interpretujte v rámci Newtonovy mechaniky. (23. října 2020)

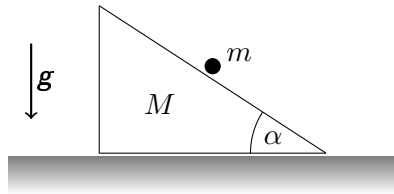


Kladkostroj Zařízení se skládá ze dvou kladek: první kladky, pevně uchytené ke stropu, a druhé volné kladky pohybující se vertikálně. Kladky samotné jsou nehmotné. Pod volnou kladkou je umístěn hmotný bod m_2 . Přes kladky je nataženo vlákno konstantní délky l na jehož konci je hmotný bod m_1 . Vypočtete zrychlení obou hmotných bodů v homogenním gravitačním poli. Náповěda: změnil-li se poloha m_1 o Δy , pak poloha m_2 bude změněna o $\frac{1}{2}\Delta y$ jako důsledek dvou pohyblivých konců vlákna. (29. října 2020)

¹Jde o datum zadání. Odevzdání je očekáváno následující týden

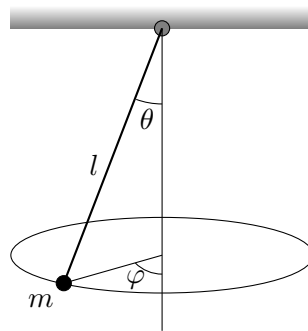


Skuz po pohyblivé rampě Tělísko o hmotnosti m se pohybuje bez tření po nakloněné rovině s neměnným vrcholovým úhlem α o hmotnosti M , která se také může pohybovat bez tření po vodorovné podložce. Vyšetřete pohyb systému. (29. října 2020)



Harmonický oscilátor S uvážením zákonů zachování nalezněte funkci popisující časovou závislost polohy harmonického oscilátoru: Zjistěte které veličiny se zachovávají, vypočtete zobecněnou energii, převedte problém na diferenciální rovnici prvního řádu, a vyřešte ji. Interpretujte výsledek. Nepoužívejte Euler-Lagrangeovu rovnici. (5. listopadu 2020)

Sférické kyvadlo Vypočtete Euler-Lagrange rovnice pro sférické kyvadlo: Hmotný bod m na niti konstantní délky l , který se může bez odporu kývat vertikálně, a zároveň opisovat horizontální elipsu. Zjistěte, které fyzikální veličiny se zachovávají. (5. listopadu 2020)



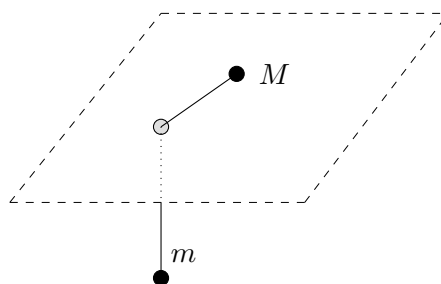
Třetí Keplerův zákon Ukažte, že třetí Keplerův zákon vyjádřený obecně

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} a^{3/2},$$

lze pro Slunce a Zemi $1/\mu = 1/M_{\odot} + 1/M_{\oplus}$, $k = GM_{\odot}M_{\oplus}$ zapsat ve tvaru $a^3 = T^2$, kdy a vyjadřujeme v astronomických jednotkách a T v rocích. Dále spočtete vzdálenost středu Slunce od středu soustavy Slunce – Země v poloměrech Slunce R_{\odot} . (12. listopadu 2020)

Na nití Dvě tělesa jsou spojena nehmotnou nití o pevné délce l . Jedno z nich, o hmotě M , se může pohybovat bez tření po stole v němž je malý otvor. Tímto otvorem je protažena nit, na níž je zavěšeno druhé těleso o hmotě m . Předpokládejme, že se spodní těleso m může pohybovat pouze vertikálně. Systém je umístěn v gravitačním poli. Pokuste se popsat pohyb systému:

- i) Kolik stupňů volnosti má daná soustava?
- ii) Ve vhodných souřadnicích sestavte Lagrangián L
- iii) Zjistěte cyklické souřadnice a jim příslušné fyzikální veličiny.
- iv) Vypočtěte zobecněnou energii.
- v) Nakreslete graf efektivního potenciálu.
- vi) Pohybuje-li se horní těleso M po kružnici, vypočtete její poloměr. Energie odpovídající tomuto pohybu odpovídá energii v minimu efektivního potenciálu.
- vii) Zapište řešení pro $r(t)$ ve tvaru diferenciální rovnice prvního řádu, ale neztrácejte čas jejím analytickým řešením. (12. listopadu 2020)



Hamiltonián relativistické částice Lagrangián částice o klidové hmotě m , a pohybující se rychlostí $v \leq c$ srovnatelnou s rychlostí světla, jest

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Najděte zobecněnou hybnost a Hamiltonián takové částice. Vypočtěte aproximaci hybnosti i Hamiltoniánu pro $v \ll c$. Jak moc překvapivý je výsledek? (19. listopadu 2020)

Hamiltonián neznámého systému Mějmež Lagrangián

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2.$$

Spočtěte Hamiltonián, vypočtete hamiltonovy rovnice. Tyto rovnice vyřešte. Pro jistotu, užíjte dva možné způsoby. Nakreslete fázový portrét. O jaký se jedná systém? (19. listopadu 2020)

Pohyb po šroubovici Částice o hmotě m se v gravitačním poli pohybuje podél šroubovice $z = k\theta$ s konstantním poloměrem $r = \text{konst.}$, kde k je konstanta a z vertikální souřadnice. Z lagrangiánu nalezněte hamiltonián, sestavte hamiltonovy rovnice, a tyto rovnice vyřešte. Ukažte, že pro $r \rightarrow 0$, $\ddot{z} = -g$. (26. listopadu 2020)

V elektromagnetickém poli Předpokládejme, že lagrangián pro nabitou částici v elektromagnetickém poli jest

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e\Phi + \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}, \quad [\text{cgs}]$$

kde e je náboj a \mathbf{v} rychlost částice v elektrickém $\Phi(x, y, z, t)$ a vektorovém $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ potenciálu. Vztah mezi nimi a magnetickou či elektrickou intenzitou je

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\Phi. \quad [\text{cgs}]$$

Odvoďte pohybovou rovnici pro tuto částici, a dokažte, že na ni pole působí silou

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right). \quad [\text{cgs}]$$

Dále vypočtete hamiltonián a zobecněnou hybnost. Pozor, všechny vztahy jsou uvedeny v systému jednotek cgs, je-li vám bližší SI, bez obav jej užíjte.

Nápověda: totální časová derivace obecné funkce $G(x, y, z, t)$ podél dráhy částice je

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla G.$$

Možná též shledáte užitečnou identitu $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ aplikovatelnou na vektory i jejich gradienty. (26. listopadu 2020)

Ve výtahu Částice s hmotou m se nachází ve výtahu přičemž se může pohybovat pouze ve směru osy z . Výtah je urychlován s konstantním zrychlením a . Nalezněte hamiltonián pro případ, že se celý systém nachází v homogenním gravitačním poli se zrychlením g . Komentujte zachování energie. V jakém případě se bude částice chovat jako volná částice? (3. prosince 2020)

V Poissonových závorkách Pro moment hybnosti $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ spočtete Poissonovu závorku výrazů $[L_y, L_z], [L^2, L_x], [p_y, L_z]$. (3. prosince 2020)