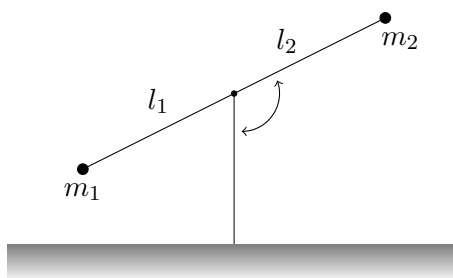


**Šikmý vrh** Mimoszemšťan o hmotě  $m$  skáče na povrchu Měsíce. Pomocí aparátu analytické mechaniky vypočtete co nejobecnější parametrickou křivku popisující jeho pohyb. (15. října 2020<sup>1</sup>)

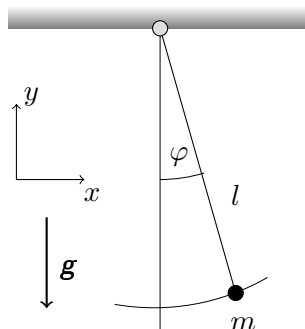
**Harmonický oscilátor** Odvoďte pohybové rovnice harmonického oscilátoru přímou variací akce, tj. bez použití Euler-Lagrange rovnic. (15. října 2020)

**Zahradní houpačka** Na obrázku vidíme zahradní houpačku. Vypočtete pohybové rovnice hmotných bodů na koncích a určete podmínku rovnováhy. (23. října 2020)



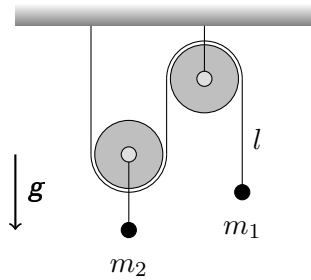
**Kyvadlo a Langrangeovy multiplikátory** Rovinné kyvadlo s hmotou  $m$  je zavěšeno na tenkém vlákně o délce  $l$ . Systém je umístěn v homogenním gravitačním poli. Vypočtete pohybové rovnice kyvadla dvěma metodami:

1. Zavedením zobecněných souřadnic.
2. Pomocí metody Langrangeových multiplikátorů. Ověřte, že obě metody řešení si navzájem odpovídají. Tento postup interpretujte v rámci Newtonovy mechaniky. (23. října 2020)

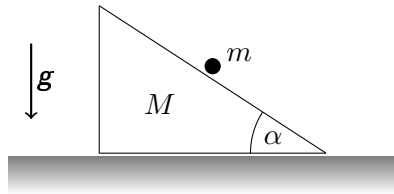


**Kladkostroj** Zařízení se skládá ze dvou kladek: první kladky, pevně uchytené ke stropu, a druhé volné kladky pohybující se vertikálně. Klady samotné jsou nehmotné. Pod volnou kladkou je umístěn hmotný bod  $m_2$ . Přes kladky je nataženo vlákno konstantní délky  $l$  na jehož konci je hmotný bod  $m_1$ . Vypočtete zrychlení obou hmotných bodů v homogenním gravitačním poli. Náповěda: změnil-li se poloha  $m_1$  o  $\Delta y$ , pak poloha  $m_2$  bude změněna o  $\frac{1}{2}\Delta y$  jako důsledek dvou pohyblivých konců vlákna. (29. října 2020)

<sup>1</sup>Jde o datum zadání. Odevzdání je očekáváno následující týden

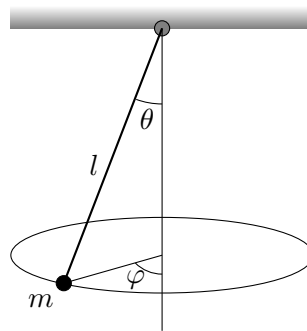


**Skuz po pohyblivé rampě** Tělísko o hmotnosti  $m$  se pohybuje bez tření po nakloněné rovině s neměnným vrcholovým úhlem  $\alpha$  o hmotnosti  $M$ , která se také může pohybovat bez tření po vodorovné podložce. Vyšetřete pohyb systému. (29. října 2020)



**Harmonický oscilátor** S uvážením zákonů zachování nalezněte funkci popisující časovou závislost polohy harmonického oscilátoru: Zjistěte které veličiny se zachovávají, vypočtete zobecněnou energii, převedte problém na diferenciální rovnici prvního řádu, a vyřešte ji. Interpretujte výsledek. Nepoužívejte Euler-Lagrangeovu rovnici. (5. listopadu 2020)

**Sférické kyvadlo** Vypočtete Euler-Lagrange rovnice pro sférické kyvadlo: Hmotný bod  $m$  na niti konstantní délky  $l$ , který se může bez odporu kývat vertikálně, a zároveň opisovat horizontální elipsu. Zjistěte, které fyzikální veličiny se zachovávají. (5. listopadu 2020)



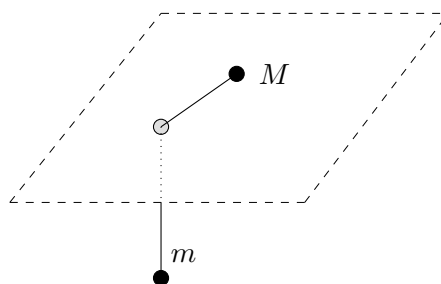
**Třetí Keplerův zákon** Ukažte, že třetí Keplerův zákon vyjádřený obecně

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} a^{3/2},$$

lze pro Slunce a Zemi  $1/\mu = 1/M_{\odot} + 1/M_{\oplus}$ ,  $k = GM_{\odot}M_{\oplus}$  zapsat ve tvaru  $a^3 = T^2$ , kdy  $a$  vyjadřujeme v astronomických jednotkách a  $T$  v rocích. Dále spočtete vzdálenost středu Slunce od středu soustavy Slunce – Země v poloměrech Slunce  $R_{\odot}$ . (12. listopadu 2020)

**Na nití** Dvě tělesa jsou spojena nehmotnou nití o pevné délce  $l$ . Jedno z nich, o hmotě  $M$ , se může pohybovat bez tření po stole v němž je malý otvor. Tímto otvorem je protažena nit, na níž je zavěšeno druhé těleso o hmotě  $m$ . Předpokládejme, že se spodní těleso  $m$  může pohybovat pouze vertikálně. Systém je umístěn v gravitačním poli. Pokuste se popsat pohyb systému:

- i) Kolik stupňů volnosti má daná soustava?
- ii) Ve vhodných souřadnicích sestavte Lagrangián  $L$
- iii) Zjistěte cyklické souřadnice a jim příslušné fyzikální veličiny.
- iv) Vypočtete zobecněnou energii.
- v) Nakreslete graf efektivního potenciálu.
- vi) Pohybuje-li se horní těleso  $M$  po kružnici, vypočtete její poloměr. Energie odpovídající tomuto pohybu odpovídá energii v minimu efektivního potenciálu.
- vii) Zapište řešení pro  $r(t)$  ve tvaru diferenciální rovnice prvního řádu, ale neztrácejte čas jejím analytickým řešením. (12. listopadu 2020)



**Hamiltonián relativistické částice** Lagrangián částice o klidové hmotě  $m$ , a pohybující se rychlostí  $v \leq c$  srovnatelnou s rychlostí světla, jest

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Najděte zobecněnou hybnost a Hamiltonián takové částice. Vypočtete aproximaci hybnosti i Hamiltoniánu pro  $v \ll c$ . Jak moc překvapivý je výsledek? (19. listopadu 2020)

**Hamiltonián neznámého systému** Mějmež Lagrangián

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2.$$

Spočtete Hamiltonián, vypočtete hamiltonovy rovnice. Tyto rovnice vyřešte. Pro jistotu, užíjte dva možné způsoby. Nakreslete fázový portrét. O jaký se jedná systém? (19. listopadu 2020)

**Pohyb po šroubovici** Částice o hmotě  $m$  se v gravitačním poli pohybuje podél šroubovice  $z = k\theta$  s konstantním poloměrem  $r = \text{konst.}$ , kde  $k$  je konstanta a  $z$  vertikální souřadnice. Z lagrangiánu nalezněte hamiltonián, sestavte hamiltonovy rovnice, a tyto rovnice vyřešte. Ukažte, že pro  $r \rightarrow 0$ ,  $\ddot{z} = -g$ . (26. listopadu 2020)

**V elektromagnetickém poli** Předpokládejme, že lagrangián pro nabitou částici v elektromagnetickém poli jest

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e\Phi + \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}, \quad [\text{cgs}]$$

kde  $e$  je náboj a  $\mathbf{v}$  rychlost částice v elektrickém  $\Phi(x, y, z, t)$  a vektorovém  $\mathbf{A}(x, y, z, t)$  potenciálu. Vztah mezi nimi a magnetickou či elektrickou intenzitou je

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\Phi. \quad [\text{cgs}]$$

Odvoďte pohybovou rovnici pro tuto částici, a dokažte, že na ni pole působí silou

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right). \quad [\text{cgs}]$$

Dále vypočtete hamiltonián a zobecněnou hybnost. Pozor, všechny vztahy jsou uvedeny v systému jednotek cgs, je-li vám bližší SI, bez obav jej užíjte.

Nápověda: totální časová derivace obecné funkce  $G(x, y, z, t)$  podél dráhy částice je

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla G.$$

Možná též shledáte užitečnou identitu  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$  aplikovatelnou na vektory i jejich gradienty. (26. listopadu 2020)

**Ve výtahu** Částice s hmotou  $m$  se nachází ve výtahu přičemž se může pohybovat pouze ve směru osy  $z$ . Výtah je urychlován s konstantním zrychlením  $a$ . Nalezněte hamiltonián pro případ, že se celý systém nachází v homogenním gravitačním poli se zrychlením  $g$ . Komentujte zachování energie. V jakém případě se bude částice chovat jako volná částice? (3. prosince 2020)

**V Poissonových závorkách** Pro moment hybnosti  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  spočtete Poissonovu závorku výrazů  $[L_y, L_z], [L^2, L_x], [p_y, L_z]$ . (3. prosince 2020)

**Poissonův poměr** Nalezněte vhodný materiál a předmět (s vhodnou strukturou, mající malý Youngův modul, příhodný tvar a velikost), vystavte ho působení síly, a zdokumentujte, fotograficky či z měření, změny jeho tvaru. (10. prosince 2020)

**Tenzor deformace a napětí** Posunutí bodů rovinného tělesa při deformaci je dáno vektorem  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = (-Ax, Bz + Cy, By)$ . Určete:

- tenzor deformace (včetně členů vyšších řádů),
  - popište deformaci slovně,
  - rozdělte tenzor deformace na objemovou a smykovou část,
  - vypočtete relativní změnu objemu,
  - dochází-li ke smyku, určete smykový úhel,
  - sestavte tenzor napětí,
  - vyčíslete veličiny z (d) – (f), pro  $A = 1/1000$ ,  $B = 2/1000$ ,  $C = 3/1000$ , a hodnoty elastických koeficientů:  $K = 10^7$  Pa,  $\mu = 10^6$  Pa.
- (10. prosince 2020)

**Kosmická trubice** Kosmická stanice je tvořena dlouhou trubkou o vnitřním poloměru  $R_1$  a vnějším  $R_2$ , jež byly změřeny před startem. Určete o kolik se změní vnější poloměr trubky po vynesení na oběžnou dráhu Země. Předpokládejte, že stěny trubice jsou tvořeny homogenním materiálem popsaným konstantami  $E$  a  $\sigma$ . (17. prosince 2020)

**Izotermický model atmosféry** Vypočtete jak se mění tlak  $p$ , a hustota  $\varrho$ , s výškou pro jednoduchý model atmosféry Země, jež předpokládá vrstvu ideálního plynu podléhající stavové rovnici:

$$\frac{p}{\varrho} = \text{konst.}$$

Zdůvodněte, proč jej nazýváme izotermickým modelem. (7. ledna 2021)

**Eulerova rovnice** Odvoďte zrychlení elementu kontinua

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

nejméně dvěma možnými způsoby. (7. ledna 2021)