

Gamma funkcie

Jan Tungli

I. GAMMA FUNKCIE

Gamma funkcie [1] sú funkcie definované integrálom:

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (1)$$

Vyskytujú sa veľmi často pri počítaní momentov v štatistickej fyzike. Tam ich väčšinou vidíme v inom tvare, s kvadratickou funkciou v exponente, napr.:

$$f(y) = \int_0^{\infty} x^y e^{-x^2} dx \quad (2)$$

Táto funkcia sa dá prepísať do predošlého tvaru Gamma funkcie substitúciou (výhodou sú potom tabuľkové hodnoty). Substitúcia bude $x^2 = t$:

$$x^2 = t \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{t} \quad (t \geq 0) \quad (3)$$

$$\Rightarrow \quad dt = 2x dx = 2\sqrt{t} dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \quad (4)$$

$$f(y) = \int_0^{\infty} x^y e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} \sqrt{t}^y e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sqrt{t}^{y-1} e^{-t} dt = \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{\frac{y-1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{\frac{y+1}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{y+1}{2}\right) \quad (6)$$

Príklad:

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \quad (7)$$

Posledný krok je vyhľadanie v tabuľke (napr. [2])

I. Konštanta v exponente

Často okrem iného tvaru je v exponente konštanta:

$$g(y) = \int_0^{\infty} x^y e^{-ax^2} dx \quad (8)$$

V tomto prípade substitúcia $t = ax^2$ rieši problém:

$$ax^2 = t \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{t}{a}} \quad (t \geq 0) \quad (9)$$

$$\Rightarrow \quad dt = 2ax dx = 2a\sqrt{\frac{t}{a}} dx = 2\sqrt{at} dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{at}} dt \quad (10)$$

$$g(y) = \int_0^\infty x^y e^{-ax^2} dx = \int_0^\infty \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{y}{2}} e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{at}} dt = \quad (11)$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{y+1}{2}}} \int_0^\infty \sqrt{t}^y e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \quad (12)$$

Integral už bol spočítaný:

$$g(y) = \frac{1}{a^{\frac{y+1}{2}}} f(y) = \frac{1}{2a^{\frac{y+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{y+1}{2}\right) \quad (13)$$

Príklad:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \quad (14)$$

II. KONKRÉTNE HODNOTY GAMMA FUNKCIE

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (15)$$

$$\Gamma(2) = 1 \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad (16)$$

$$\Gamma(3) = 2 \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \quad (17)$$

$$\Gamma(4) = 6 \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi} \quad (18)$$

$$(19)$$

III. NEMÁM PO RUKU TABUĽKY..

Hodnoty v predchádzajúcej časti je možné vypočítať ešte relatívne jednoducho. Môžeme si odvodiť užitočný vzťah pomocou *per partes* na definíciu Gamma funkcie:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \left[-t^{z-1} e^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (z-1)t^{z-2} e^{-t} dt = \quad (20)$$

$$= (z-1) \int_0^\infty t^{z-2} e^{-t} dt \equiv (z-1)\Gamma(z-1) \quad (21)$$

Z toho je zrejmé, že predošlú tabuľku je možné odvodiť celú, pokiaľ poznáme (napr.) $\Gamma(1)$ a $\Gamma(1/2)$.

Príklad:

$$\Gamma(3) = (3-1)\Gamma(3-1) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1\Gamma(1) = 2 \quad (22)$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad (23)$$

Pre $\Gamma(1)$ vyzerá integrál takto:

$$\int_0^{\infty} t^0 e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = e^0 - e^{-\infty} = 1 \quad (24)$$

Pre $\Gamma(\frac{1}{2})$ je to o niečo horšie:

$$\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \quad (25)$$

Niektoré matematické problémy sa riešia jednoduchšie keď sa zkomplikujú. Preto vyriešime:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad (26)$$

zavedením polárnych súradníc:

$$x(r, \varphi) = r \cos \varphi, y(r, \varphi) = r \sin \varphi \quad (27)$$

Potrebuje Jakobián transformácie:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r \quad (28)$$

Náš integrál je:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} |J| dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi = \quad (29)$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{1}{2} dt = \frac{\pi}{4} \quad (30)$$

Myšlienka, ktorou sa dostaneme späť ku Gamma funkciám: môžeme napísať pôvodný integrál ako:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy, \quad (31)$$

je vidieť, že integrály sú nezávislé, takže:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \left(\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \right)^2 \quad (32)$$

Tým sa výsledok samozrejme nezmenil:

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \right)^2 = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \quad (33)$$

Už bolo ukázané $\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz$ sa dá prepísať na Gamma funkciu:

$$\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \Rightarrow \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (34)$$

REFERENCES

- [1] WolframAlpha. *Gamma Function*. 2017. URL: <http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html> (visited on 10/20/2017).
- [2] Wikipedia. *Particular values of the Gamma function*. 2017. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Particular_values_of_the_Gamma_function (visited on 10/20/2017).