Struktura a kinematika galaxií

Bruno Jungwiert

Astronomical Institute of the Czech Academy of Sciences

Přednášky č. 3 a 4 (5. 11. 2020)

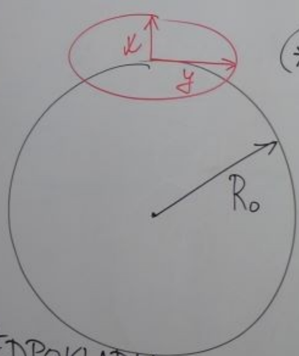
1. Epicyklická aproximace v osově symetrickém gr. poli

2. Gravitační pole homogenní sféry

3. Pohyby hvězd kolmo na galaktickou rovinu

Přírodovědecká fakulta MU - F7567 - 2020

EPICYKLICKÁ APROXIMACE



$$(*)\quad \ddot{R} - R\,\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial R}$$

$$\frac{d}{dt}\big(\underbrace{R^2\dot{\varphi}}_{L_z}\big) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

POHYBOVÁ ROVNICE V POLÁRNÍCH SOUŘADNICÍCH

PŘEDPOKLADY:

- osová symetrie, tj. $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0$
- dráha blízká kruhové, tj. $R(t) = R_0 + x(t)$, $|x(t)| \ll R_0$

$\Rightarrow L_z = \text{const.} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L_z}{R^2}$

$\Rightarrow$ dosadit do $(*)$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\ddot{R} - \frac{L_z^2}{R^3} = -\frac{\partial \Phi}{\partial R}}$$

Rozvoj v blízkosti kruhové dráhy

rozvijená dráha (rozeta) má stejné L_z jako kruhová dr.

$$(\ddot{R}_0 + \ddot{x}) - \frac{L_z^2}{(R_0 + x)^3} = -\frac{\partial \Phi}{\partial R}$$

$\ddot{R}_0 = 0$

$$\ddot{x} - \frac{L_z^2}{R_0^3} + \frac{3L_z^2}{R_0^4}x = -\left.\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right|_{R_0} - \left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}\right|_{R_0} x$$

Taylorovy rozvoje v okolí R_0 (linearizace)

PODMÍNKA PRO KRUHOVOU DRÁHU

$\Rightarrow$ zbývá: $\ddot{x} + \left(\frac{3L_z^2}{R_0^4} + \left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}\right|_{R_0}\right) x = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = -\kappa^2 x}$$

κ - EPICYKLICKÁ FREKV.

$$\boxed{\kappa^2 \equiv \frac{3L_z^2}{R_0^4} + \left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}\right|_{R_0} = \left.\left(\frac{3}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}\right)\right|_{R_0}}$$

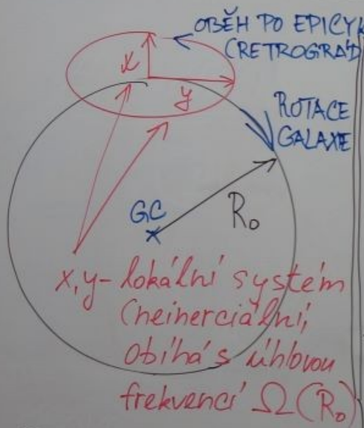
POMOCNÉ VZTAHY:

$L_z = R_0 \cdot v_c = R_0^2 \Omega$

$\Omega^2 = \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial R} \Rightarrow$

$\frac{3L_z^2}{R_0^4} = \frac{3}{R_0}\left.\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right|_{R_0}$

EPICYKLICKÁ APROXIMACE – POKRAČOVÁNÍ



$\ddot{x} = -\varkappa^2 x$ HARMONICKÝ OSCILÁTOR

$x = X \sin(\varkappa t + \alpha)$ fáze – zvolíme $\alpha = 0$, tj. $x = 0$ pro $t = 0$

amplituda radiálních kmitů

$\Rightarrow R(t) = R_0 + X \sin(\varkappa t)$

Rozbor pohybu v ose y:

1) návrat k azimutální složce poh. rovnice $\dot{\varphi} = \frac{L_z}{R^2}$

2) rozvoj v okolí R_0 + linearizace

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L_z}{(R_0 + x)^2} \doteq \frac{L_z}{R_0^2} - \frac{2L_z}{R_0^3} x = \Omega(R_0) - \frac{2L_z}{R_0^3} x$$

$\dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi}_1$

ROVNOMĚRNÝ POHYB PO KRUŽNICI

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{2L_z}{R_0^3} x = -\frac{2L_z}{R_0^3} X \sin \varkappa t$$

$\Rightarrow$ integrace přes čas: $\varphi_1 = \frac{2L_z X}{R_0^3 \varkappa} \cos \varkappa t$

– převod na lineární souřadnici:

$$y \doteq R_0 \varphi_1 = \frac{2L_z}{R_0^2} \frac{X}{\varkappa} \cos \varkappa t = \frac{2\Omega}{\varkappa} \cos \varkappa t$$

SHRNUTÍ:

1) PARAMETRICKÉ VYJÁDŘENÍ ROZETY:

$R(t) = R_0 + X \sin \varkappa t$

$\varphi(t) = \Omega(R_0) \cdot t + \frac{Y}{R_0} \cos \varkappa t$

2) EPICYKL = ELIPSA

$x = X \sin \varkappa t$

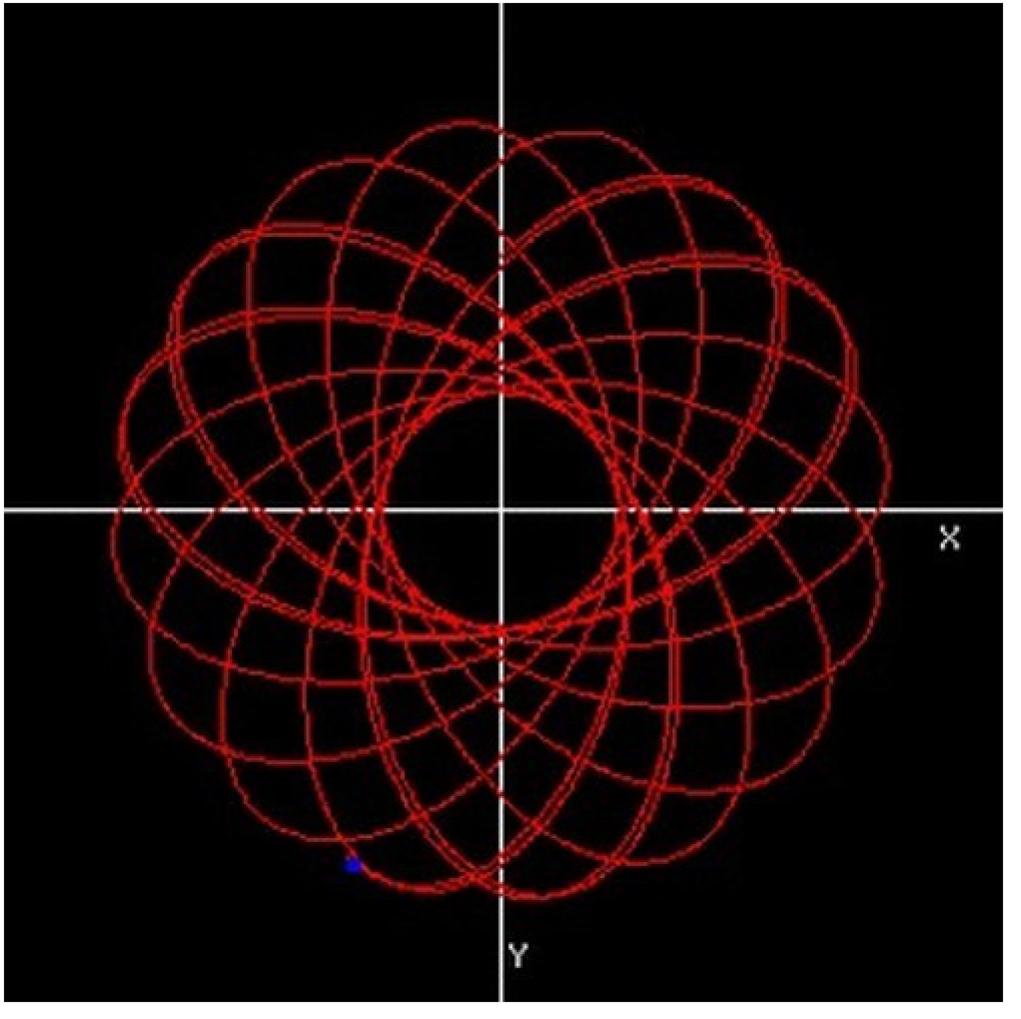
$y = Y \cos \varkappa t$

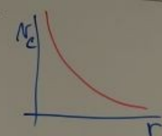
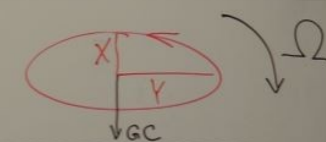
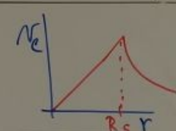
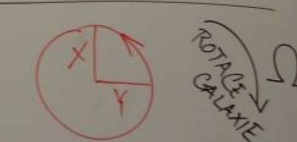
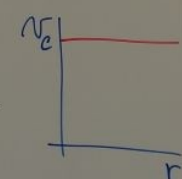
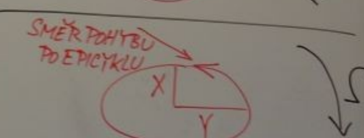
AMPLITUDY KMITŮ (= OSY EPICYKLU)

$\frac{Y}{X} = \frac{2\Omega}{\varkappa}$

POMĚR POLOOS JE FIXOVÁN POTENCIÁLEM!

Neperiodická rozeta ve sférickém potenciálu
nebo
v rovině z=0 osově symetrického potenciálu



	Φ	$\Omega=\sqrt{\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}}$	$v_c=\sqrt{\frac{\partial\Phi}{\partial r}}=\Omega\cdot r$	$\frac{\varkappa}{\Omega}$	$\frac{X}{Y}=\frac{\varkappa}{2\Omega}$	TVAR EPICYKLU
HMOTNÝ BOD (HB)	$-\frac{GM}{r}$	$\sqrt{\frac{GM}{r^3}}$	$\sqrt{\frac{GM}{r}}$ 	1	$\frac{1}{2}$	
HOMOGENNÍ SFÉRA (HS) (o poloměru R_s)	$-\frac{GM}{2R_s}\left(3-\frac{r^2}{R_s^2}\right)$	$\sqrt{\frac{GM}{R_s^3}}=$ Const.	$\sqrt{\frac{GM}{R_s^3}}\cdot r$ 	2	1	
LOGARITMICKÝ POTENCIÁL	$v_0^2\ln r$	$\frac{v_0}{r}$	$v_0=$ konst 	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\doteq 0{,}7$	

$$1\leq\frac{\varkappa}{\Omega}\leq 2 \qquad \nabla$$

$$\frac{1}{2}\leq\frac{\varkappa}{2\Omega}\leq 1 \qquad 0$$

ODBOČKA: GRAVITAČNÍ POLE HOMOGENNÍ SFÉRY (UVNITŘ A VNĚ)

(PRAKTICKÉ POUŽITÍ: CENTRÁLNÍ ČÁST GALAXIÍ S „JÁDREM" TÉMĚŘ KONSTANTNÍ HUSTOTY)

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM(r)}{r^2}\vec{e}_r$$

M(r) - hmotnost uvnitř poloměru r

(díky 1. a 2. Newtonovu teorému)

$$M(r) = \frac{4\pi}{3}\varrho_0 r^3$$

$$M_{tot} = \frac{4\pi}{3}\varrho_0 R_s^3$$

$$\Rightarrow M(r) = \frac{r^3}{R_s^3}\cdot M_{tot}$$

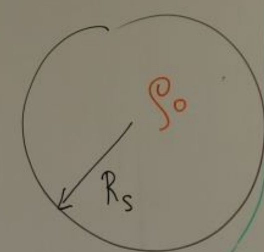
$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_{tot}}{R_s^3}\, r\cdot\vec{e}_r$$

$$\ddot{x} = -\frac{GM_{tot}}{R_s^3}\cdot x = -\Omega^2\cdot x$$

$$\ddot{y} = -\frac{GM_{tot}}{R_s^3}\cdot y = -\Omega^2\cdot y$$

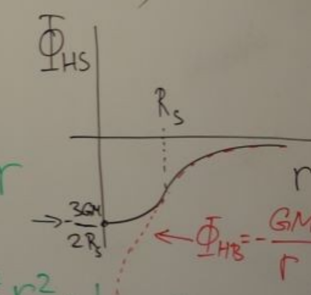
kolmé harmonické kmity se stejnou frekvencí $\Omega_x = \Omega_y = \Omega$

DRÁHA JE ELIPSA



Výpočet $\Phi(r)$:

$$F_r = -\frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{GM_{tot}}{R_s^3}\cdot r$$



$$\Phi(r) = \int F_r\, dr = -\frac{GM_{tot}}{2R_s^3} r^2 + \text{konst.}$$

určení konstanty: $\Phi(R_s) = -\frac{GM_{tot}}{2R_s} + \text{konst} \Rightarrow \text{konst} = -\frac{3}{2}\frac{GM_{tot}}{R_s}$

$\parallel$ $-\frac{GM_{tot}}{R_s}$ (potenciál hm. bodu o stejné hmotnosti)

$$\Rightarrow \Phi = -\frac{GM_{tot}}{2R_s}\left(3 - \frac{r^2}{R_s^2}\right), \text{ pro } r \le R_s$$

GRAVITAČNÍ POLE HOMOGENNÍ SFÉRY – POKRAČOVÁNÍ

$M_{tot} = \frac{4\pi}{3} R_s^3 \varrho_0 \Rightarrow 4\pi\varrho_0 = \frac{3M_{tot}}{R_s^3}$

Alternativa k odvození potenciálu:

- uvnitř sféry: $\varrho = \varrho_0$

Poissonova rovnice: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \underbrace{\boxed{\text{členy s } \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \text{ a } \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}}}_{\emptyset} = 4\pi G \varrho_0 = \frac{3GM_{tot}}{R_s^3} \Big/ \cdot r^2$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) = \frac{3GM_{tot}}{R_s^3} r^2$

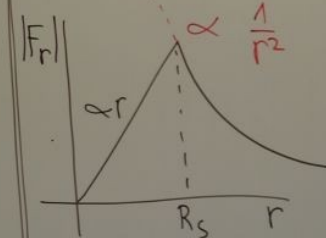
$\Rightarrow r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{GM_{tot}}{R_s^3} r^3 + \underbrace{const.}_{\emptyset}$ (z podmínky kontinuity síly $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ v R_s: $\left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right|_{R_s} = -\frac{GM_{tot}}{R_s^2}$)

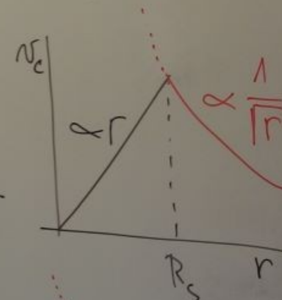
$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{GM_{tot}}{R_s^3} \cdot r} \Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{GM_{tot}}{2R_s^3} r^2 + konst.}$ ← určit z podmínky $\Phi(R_s) = -\frac{GM}{R_s}$ (viz minulá tabule)

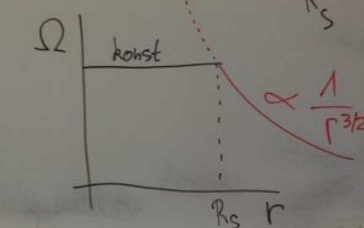
$F_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{GM_{tot}}{R_s^3} \cdot r$

$v_c = \sqrt{r|F_r|} = \sqrt{r \frac{\partial \Phi}{\partial r}} = \sqrt{\frac{GM_{tot}}{R_s^3}} \cdot r$

$\Omega = \frac{v_c}{r} = \sqrt{\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}} = \sqrt{\frac{GM_{tot}}{R_s^3}} = konst$







EPICYKLICKÁ APROXIMACE A DRÁHY V POTENCIÁLECH

- HOMOGENNÍ SFÉRY (HS)
- HMOTNÉHO BODU (HB)

HS : $\varkappa = 2\Omega$,

(dvě radiální oscilace během jednoho oběhu)

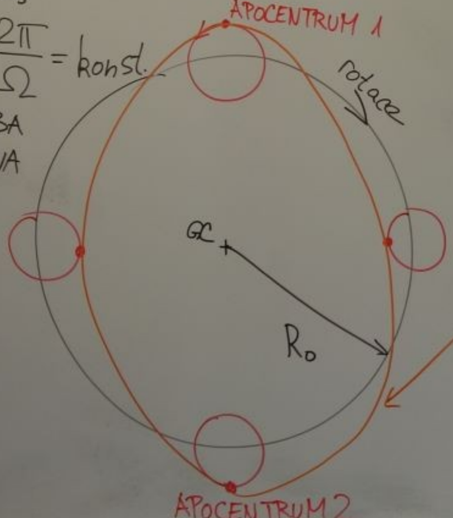
$$\Omega = \sqrt{\frac{GM_{tot}}{R_s^3}} = konst$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\Omega} = konst.$$

$\Rightarrow$ OBĚŽNÁ DOBA NEZÁVISÍ NA VELIKOSTI ELIPSY

$$\frac{X}{Y} = \frac{\varkappa}{2\Omega} = 1$$

($\Rightarrow$ kruhový epicykl)



DRÁHA = ELIPSA S GEOM. STŘEDEM VE STŘEDU HOM. SFÉRY

HB : $\varkappa = \Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \neq konst$

(jedna radiální oscilace za jeden oběh v azimutu)

DRÁHA = ELIPSA S OHNISKEM VE HMOTNÉM BODU

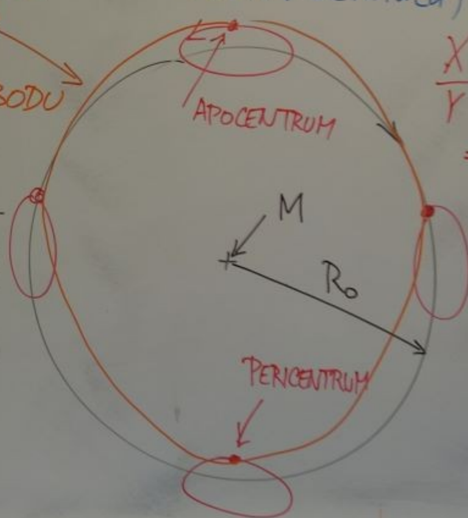
OBĚŽNÁ DOBA

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

(3. KEPLERŮV ZÁKON)

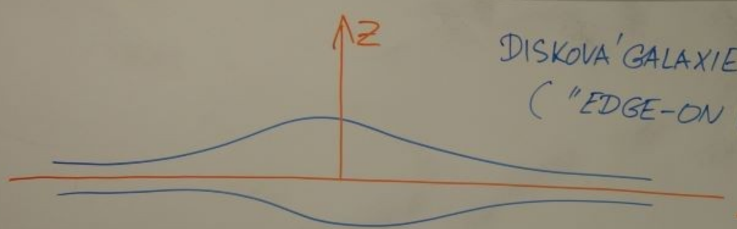
$$\frac{X}{Y} = \frac{\varkappa}{2\Omega} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ eliptický epicykl s $b = \frac{a}{2}$



POHYB HVĚZD KOLMO NA GALAKTICKOU ROVINU

DISKOVÁ GALAXIE Z BOKU
("EDGE-ON VIEW")



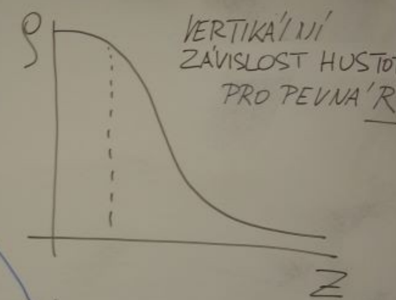
$\ddot{z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ odhadneme z Poissonovy rovnice:

$$\underbrace{\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\Big(\underbrace{R\frac{\partial \Phi}{\partial R}}_{=v_c^2}\Big)}_{\phi \text{ (plochá rotační křivka)}} + \underbrace{\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}}_{\phi \text{ (osová symetrie)}} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi G \varrho$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi G \varrho(R,z)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \doteq 4\pi G \varrho_0(R)$$

ŘEŠÍME ZVLÁŠŤ PRO KAŽDÉ R



VERTIKÁLNÍ ZÁVISLOST HUSTOTY PRO PEVNÁ R

Aproximace:
- pro malé z je $\varrho(R,z) \doteq \varrho(R,z=0)$

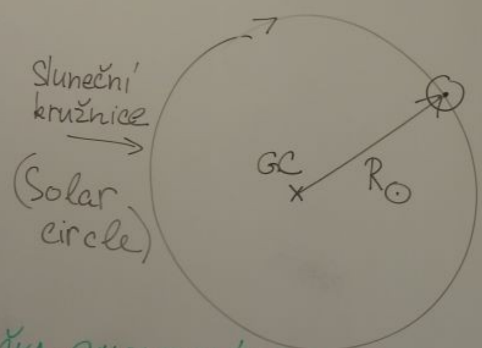
$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 4\pi G \varrho_0 z$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \ddot{z} = -4\pi G \varrho_0 z = -\nu_z^2 z \\ z = Z \sin(\nu_z t + \varphi_z) \end{array}}$$

VERTIKÁLNÍ HARMONICKÉ KMITY (PRO MALÉ VERTIKÁLNÍ AMPLITUDY)

VERTIKÁLNÍ FREKVENCE $\nu_z(R) = \sqrt{4\pi G \varrho_0(R)} = \sqrt{\left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right|_R}$

OKOLÍ SLUNCE



ODBOČKA - GALAKTICKÉ JEDNOTKY:

$[d] = \text{kpc}$, $[v] = \text{km/s}$, $G \equiv 1$

$\Longrightarrow$

$[\Omega] = \text{km/s/kpc}$, $[M] = 2{,}32 \cdot 10^5 \, M_\odot$,

$[t] = 0{,}978 \cdot 10^9 \, \text{yr} \doteq 10^9 \, \text{yr}$ (1 Gyr)

$R_\odot = 8{,}2 \pm 0{,}2 \text{ kpc}$

$v_c(R_\odot) = 240 \pm 20 \text{ km/s}$

$$\Omega(R_\odot) = \frac{v_c(R_\odot)}{R_\odot} \doteq 29 \text{ km/s/kpc}$$

(± 3 km/s/kpc)

$$\varkappa(R_\odot) \doteq \sqrt{2}\, \Omega(R_\odot) \doteq 40 \text{ km/s/kpc}$$

$\rho(R_\odot, z=0) \doteq 0{,}1 \, M_\odot/\text{pc}^3$

$\Rightarrow \nu_z(R_\odot) = \sqrt{4\pi G \rho(R_\odot, z=0)} \doteq 73 \text{ km/s/kpc}$

$$\boxed{\nu_z > \varkappa > \Omega}$$

Periody oběhu a radiálních / vertikálních kmitů:

$$T(R_\odot) = \frac{2\pi}{\Omega(R_\odot)} \doteq 210 \cdot 10^6 \text{ yr} \ (210 \text{ Myr})$$

$$T_r(R_\odot) = \frac{2\pi}{\varkappa(R_\odot)} \doteq 160 \cdot 10^6 \text{ yr} \ (160 \text{ Myr})$$

$$T_{\nu_z}(R_\odot) = \frac{2\pi}{\nu_z(R_\odot)} \doteq 84 \cdot 10^6 \text{ yr} \ (84 \text{ Myr})$$