Tenzorová algebra

Tenzory ve více rozměrech

Tenzory různých řádů

Počítání s tenzory

výsledná veličina =

= **fyzikální vlastnost** ● příčinná veličina

Počítání s tenzory

tenzor = složená veličina

míru složenosti určuje řád tenzoru

- tenzory 0. řádu = skaláry
- tenzory 1. řádu = vektory
- tenzory 2. řádu = matice
- tenzory 3. řádu
- tenzory 4. řádu

Počítání s tenzory

tenzor = složená veličina

počet parametrů určuje také rozměr (dimenze – D)

- 1D = na přímce
- 2D = v rovině
- 3D = v prostoru
- 4D = ve čtyřrozměrném prostoru
- atd.

Počet parametrů

Rozměry → Řád tenzoru↓	**1**	**2**	**3**	**4**

Tenzory 0. řádu

Skalární veličiny

Skalární veličiny

- Hustota
- Teplota, změna teploty
- Čas
- Všesměrný tlak
- …

Lineární skalární vlastnosti:

= lineární vztah dvou skalárních veličin

neboli $c = t \, . \, a$

Počet parametrů

Rozměry → Řád tenzoru↓	**1**	**2**	**3**	**4**
0. - skalár				

Počet parametrů

Rozměry → Řád tenzoru↓	**1**	**2**	**3**	**4**
0. - skalár	**1**	**1**	**1**	**1**

Tenzory 1. řádu

Vektorové veličiny

Vektorové veličiny

- Poloha (rádiusvektor), přemístění („vektor“), směr (směrový vektor)
- Síla, napětí (tlak)
- Intenzita pole elektrického ***E***, magnetického ***H***
- Elektrická indukce ***D***, magnetická indukce ***B***
- Polarizace elektrická ***P***, magnetizace
- Minerální či chemické složení
- ...

Vektorové vlastnosti:

- Pyroelektrické vlastnosti krystalu $\Delta \boldsymbol{P} = \boldsymbol{\gamma}.\Delta T$
- Elektrokalorický jev $\Delta T = \boldsymbol{q}.\Delta \boldsymbol{E}$
- …

Tenzor prvního řádu – vektor ve dvou rozměrech

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Tenzor prvního řádu – vektor ve třech rozměrech

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Tenzor prvního řádu - vektor

$$\mathbf{a} = [\mathrm{a}_i]$$

Počet parametrů

Rozměry → Řád tenzoru↓	**1**	**2**	**3**	**4**
0. - skalár	1	1	1	1
1. - vektor				

Počet parametrů

Rozměry → Řád tenzoru↓	**1**	**2**	**3**	**4**
0. - skalár	1	1	1	1
1. - vektor	**1**	**2**	**3**	**4**

Počítání s tenzory

- počítání s tenzory 1. řádu – vektory
  - skalární příčina, vektorový výsledek $\rightarrow$ vlastnost musí být vektorová:
  - **vektor** = **vektor** . skalár (násobení vektoru skalárem)
  - např. pyroelektrický jev (po ohřátí se na krystalu objeví elektrická polarizace) $\Delta \boldsymbol{P} = \boldsymbol{\gamma} . \Delta T$
  - $\boldsymbol{\gamma}$ = vektor pyroelektrických koeficientů
  - je možný jen u krystalů bez středové symetrie
  - $\Delta P_i = \gamma_i . \Delta T$

Počítání s tenzory

- počítání s tenzory 1. řádu – vektory
  - vektorová příčina, skalární výsledek → vlastnost musí být vektorová:
  - skalár = **vektor** . **vektor** (skalární součin vektorů)
  - např. elektrokalorický jev (vlivem změny intenzity vnějšího elektrického pole krystal změní teplotu) $\Delta T = \boldsymbol{q}.\Delta\boldsymbol{E}$
  - ***q*** = vektor elektrokalorických součinitelů
  - $\Delta T = q_1.\Delta E_1 + q_2.\Delta E_2 + q_3.\Delta E_3 = \Sigma\, q_i.\Delta E_i$

Tenzory 2. řádu

Matice

Tenzorové veličiny 2. řádu

= lineární vztah dvou vektorů $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{T}.\boldsymbol{a}$

neboli: $b_1=t_{11}.a_1 + t_{12}.a_2 + t_{13}.a_3 + t_{11}.a_1$

… nebo tenzoru a skaláru

- Napjatost $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{T}_{\blacklozenge}.\boldsymbol{n}$ (směrový vektor plochy a vektor napětí)
- Deformace (polohový vektor původní a po deformaci, příp. polohový vektor a vektor přemístění při deformaci, aj.)
- Magnetická susceptibilita (magnetická polarizace a intenzita magnetického pole)
- Permitivita $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\varepsilon} . \boldsymbol{E}$ (elektrická indukce a intenzita elektrického pole) – určuje i optické vlastnosti, např. optickou indikatrix (indexy lomu)
- Teplotní roztažnost $\boldsymbol{T}_{\varepsilon} = \boldsymbol{\alpha} . \Delta T$ (teplota a tenzor deformace)
- Matice převodu chemického na minerální složení či naopak
- …

Tenzor druhého řádu ve dvou rozměrech

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Tenzor druhého řádu ve třech rozměrech

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Tenzor druhého řádu (matice)

$$\mathbf{a} = [\mathrm{a}_{ij}]$$

Počet parametrů

Rozměry → Řád tenzoru↓	**1**	**2**	**3**	**4**
0. - skalár	1	1	1	1
1. - vektor	1	2	3	4
2.(matice)				

Počet parametrů

Rozměry → Řád tenzoru↓	**1**	**2**	**3**	**4**
0. - skalár	1	1	1	1
1. - vektor	1	2	3	4
2.(matice)	**1**	**4**	**9**	**16**

Počítání s tenzory

- počítání s tenzory 2. řádu (matice)
  - vektorová příčina, vektorový výsledek → vlastnost musí být tenzor 2. řádu:
  - **vektor** = **matice** . **vektor** (součin matic příslušných rozměrů)
  - např. napjatost: ***T*** = tenzor napjatosti (vztah mezi směrovým vektorem normály k ploše ***n*** a na ní působící napětí ***s***):
  - ***s*** = ***T***.***n***
  - např. $s_1 = t_{11}.n_1 + t_{12}.n_2 + t_{13}.n_3$
  - $s_i = \Sigma\, t_{ij}.n_j \quad \rightarrow \quad s_i = t_{ij}.n_j$

Počítání s tenzory

- počítání s tenzory 2. řádu (matice)
  - skalární příčina, výsledek tenzor 2. řádu $\rightarrow$ vlastnost musí být tenzor 2. řádu:
  - **matice** = **matice** . skalár (skalární násobek matice)
  - např. Teplotní roztažnost $\boldsymbol{T}_{\varepsilon} = \boldsymbol{T}_{\alpha} \,.\, \Delta T$ (teplota ΔT a tenzor deformace $\boldsymbol{T}_{\varepsilon}$)
  - např. $\varepsilon_{11} = \alpha_{11} . \,\Delta T$
  - $\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij} . \,\Delta T$

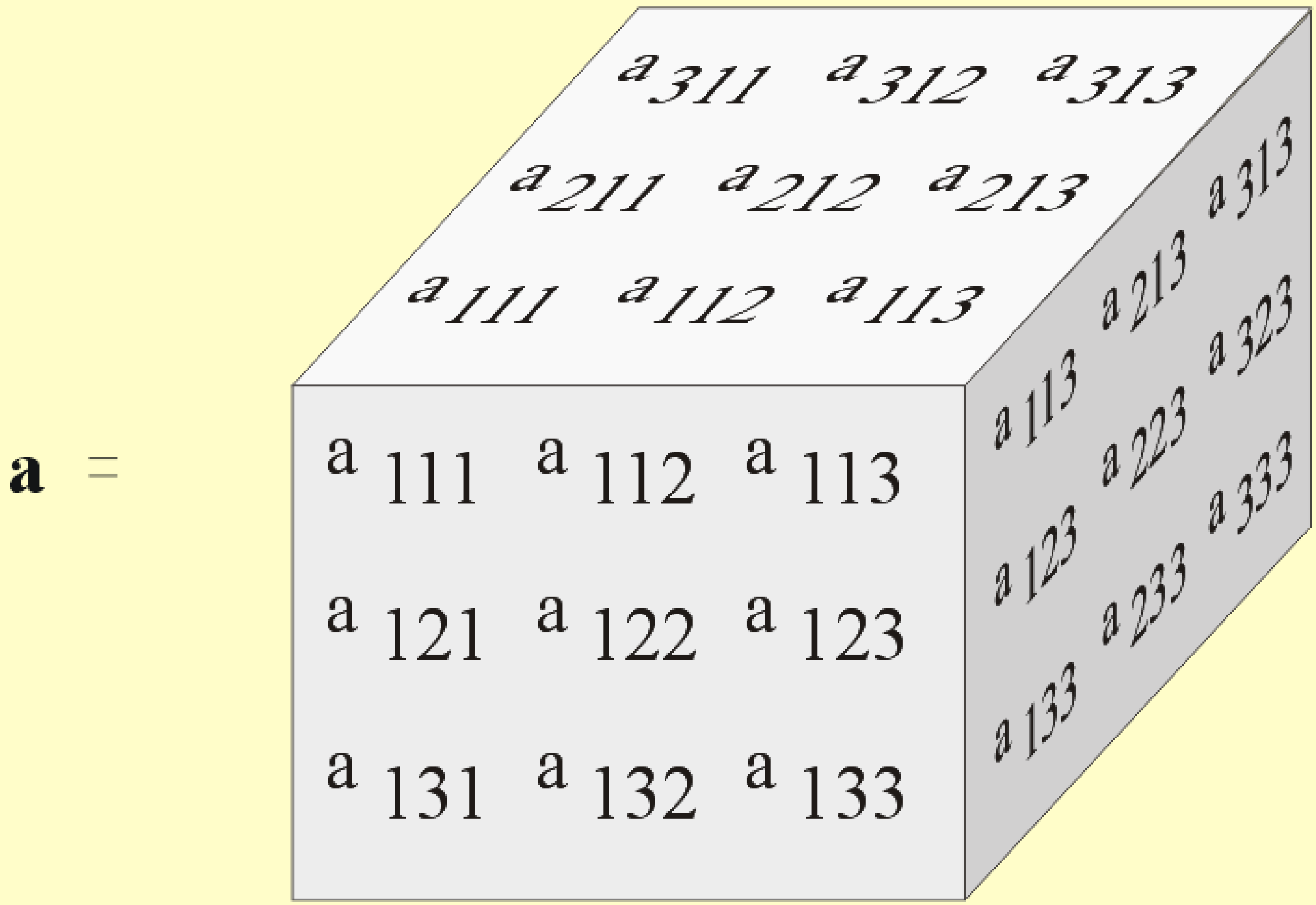
Tenzory 3. řádu

Tenzorové veličiny 3. řádu

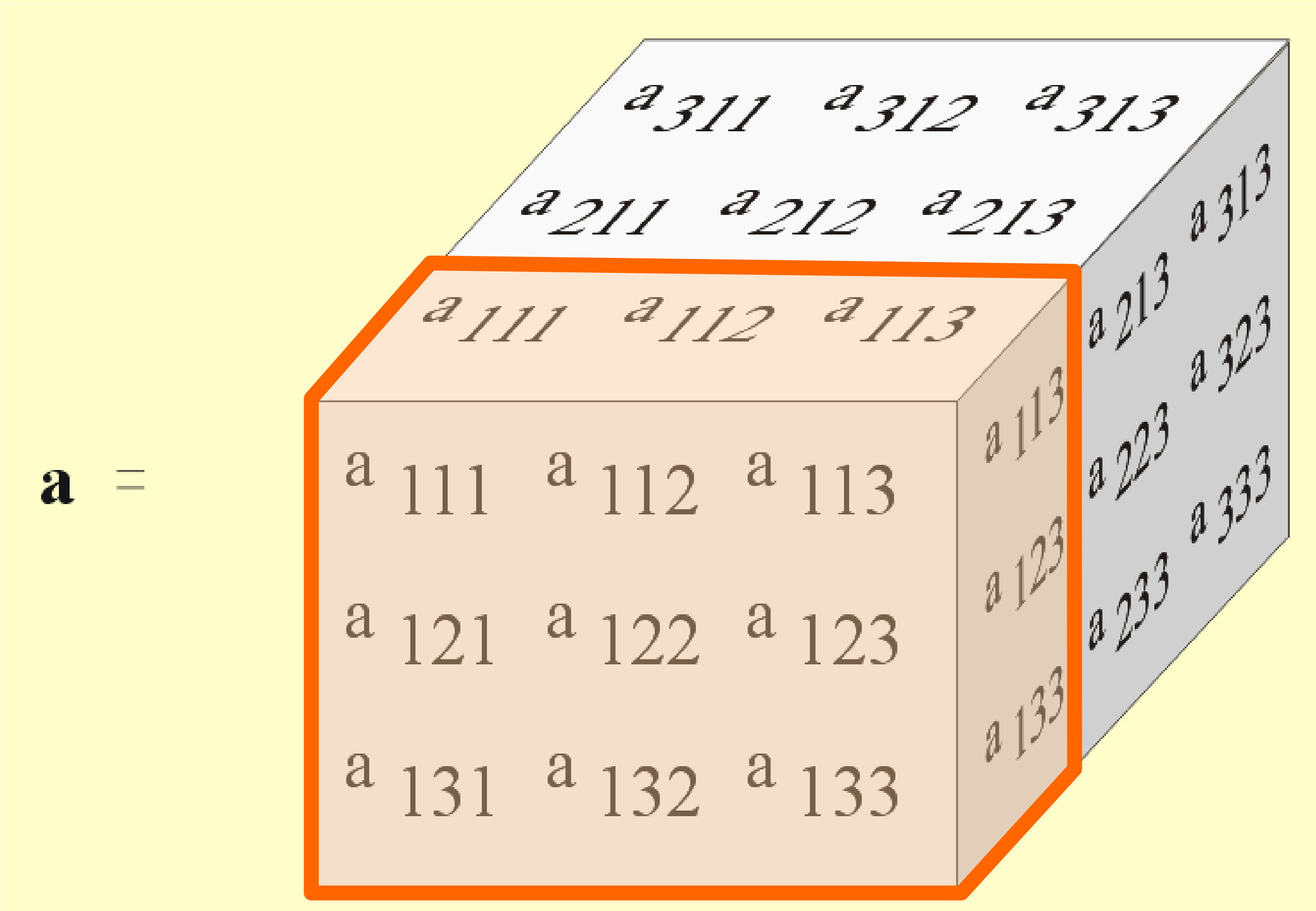
= lineární vztah tenzoru 1. a 2. řádu $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{T}.\boldsymbol{a}$

- Piezoelektrický jev $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}.\boldsymbol{T}_{\sigma}$ (vektor piezoelektrického náboje a tenzor napjatosti)
- …

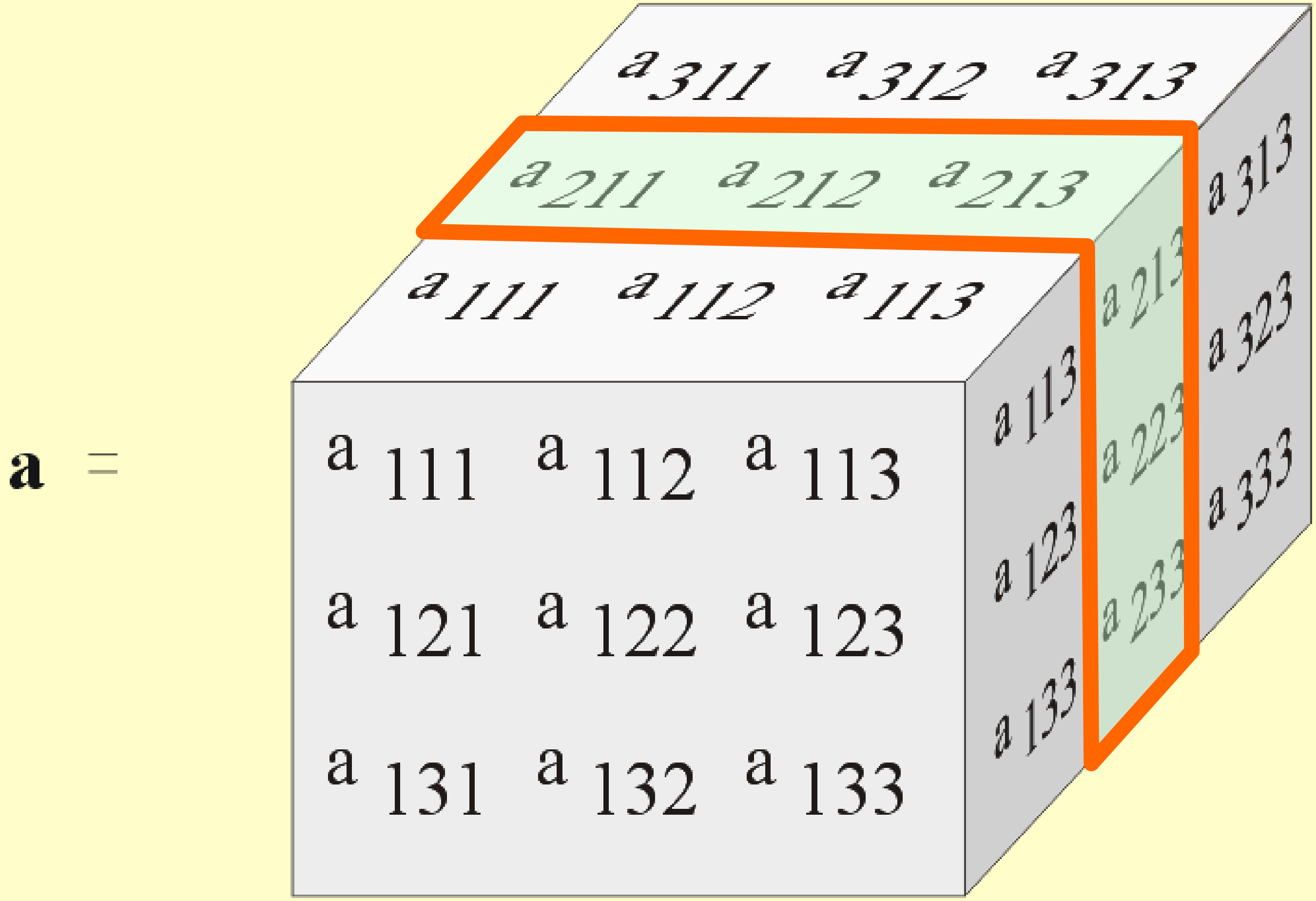
Tenzor třetího řádu



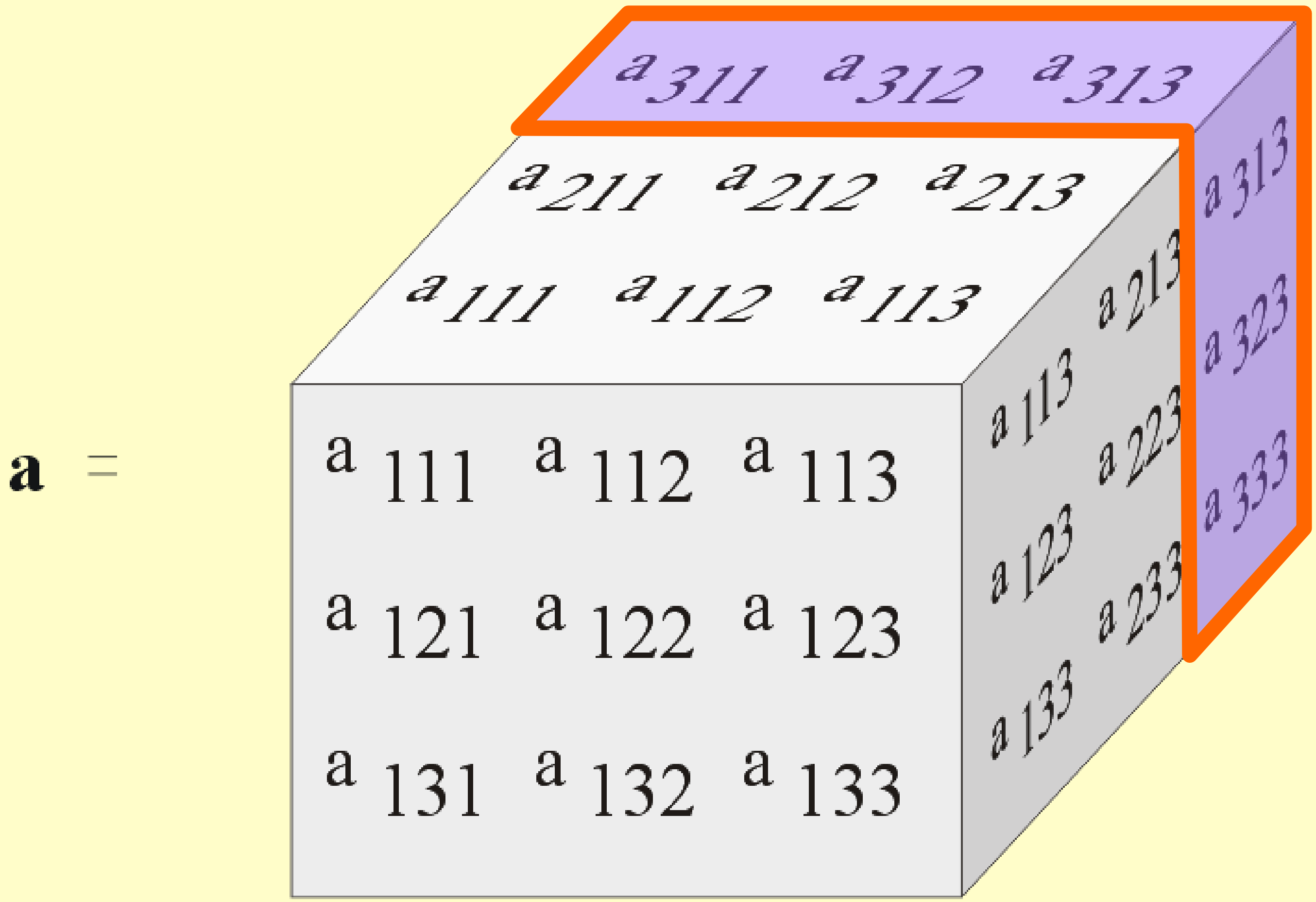
Tenzor třetího řádu



Tenzor třetího řádu

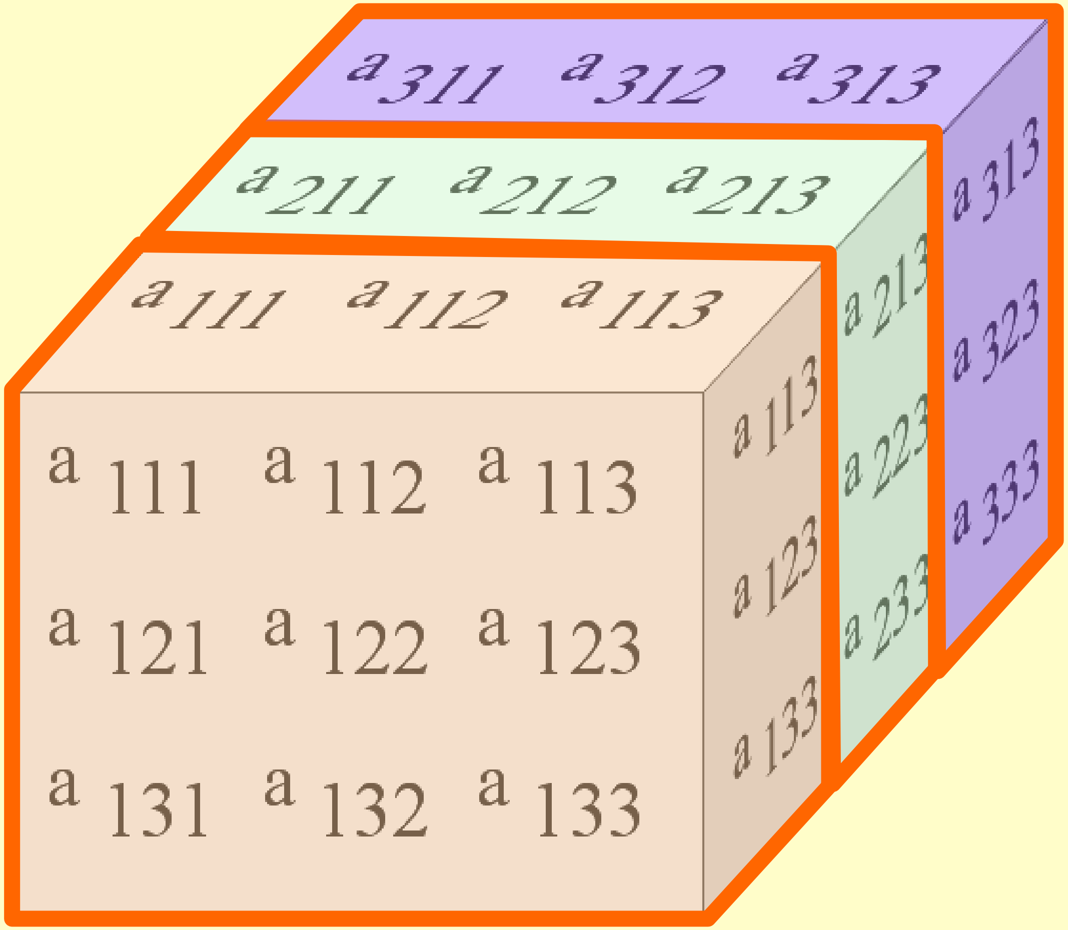


Tenzor třetího řádu

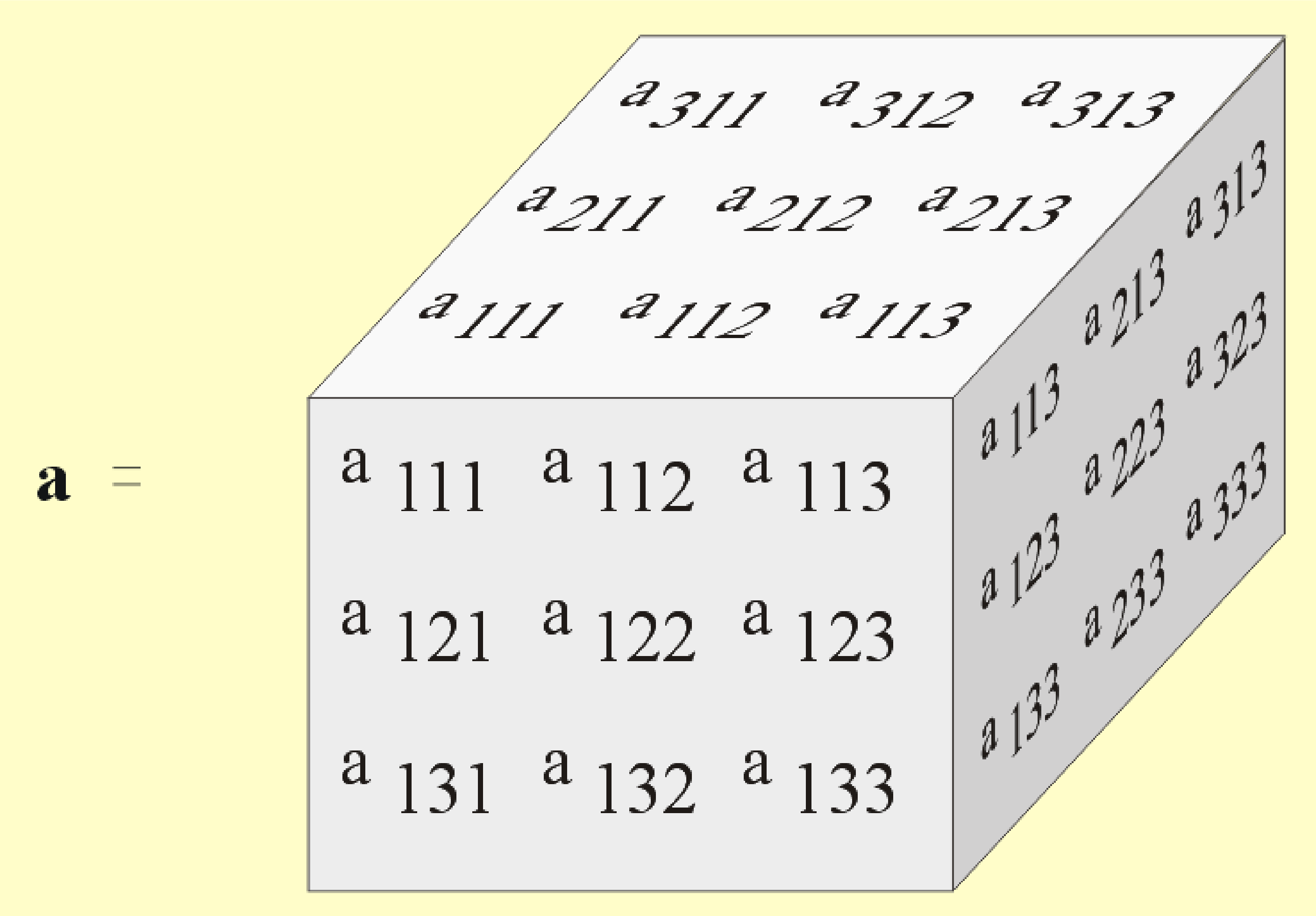


Tenzor třetího řádu

a =



Tenzor třetího řádu



Tenzor třetího řádu

$$a = \begin{bmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{113} \\ a_{121} & a_{122} & a_{123} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{211} & a_{212} & a_{213} \\ a_{221} & a_{222} & a_{223} \\ a_{231} & a_{232} & a_{233} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{311} & a_{312} & a_{313} \\ a_{321} & a_{322} & a_{323} \\ a_{331} & a_{332} & a_{333} \end{bmatrix}$$

Tenzor třetího řádu

$$\mathbf{a} = [\mathrm{a}_{ijk}]$$

Počet parametrů

Rozměry → Řád tenzoru↓	1	2	3	4
0. - skalár	1	1	1	1
1. - vektor	1	2	3	4
2.(matice)	1	4	9	16
3. řád				

Počet parametrů

Rozměry → Řád tenzoru↓	**1**	**2**	**3**	**4**
0. - skalár	1	1	1	1
1. - vektor	1	2	3	4
2.(matice)	1	4	9	16
3. řád	**1**	**8**	**27**	**64**

Počítání s tenzory

- počítání s tenzory 3. řádu
  - příčina tenzor 2. řádu, výsledek vektor $\rightarrow$ vlastnost musí být tenzor 3. řádu:
  - **vektor** = **tenzor3** . **matice** (násobení tenzorů)
- Piezoelektrický jev $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}.\boldsymbol{T}_\sigma$ (vektor piezoelektrického náboje $\boldsymbol{P}$ a tenzor napjatosti $\boldsymbol{T}_\sigma$)
  - $P_i = \Sigma_j \Sigma_k D_{ijk} . T_{jk}$ – devět členů
  - $P_i = D_{ijk} . T_{jk}$

Tenzory 4. řádu

Tenzor čtvrtého řádu

$$\mathbf{a} = [\mathrm{a}_{ijkl}]$$

Počet parametrů

Rozměry → Řád tenzoru↓	**1**	**2**	**3**	**4**
0. - skalár	1	1	1	1
1. - vektor	1	2	3	4
2.(matice)	1	4	9	16
3. řád	1	8	27	64
4. řád				

Počet parametrů

Rozměry → Řád tenzoru↓	**1**	**2**	**3**	**4**
0. - skalár	1	1	1	1
1. - vektor	1	2	3	4
2.(matice)	1	4	9	16
3. řád	1	8	27	64
4. řád	**1**	**16**	**81**	**256**

Tenzorové veličiny 4. řádu

- počítání s tenzory 4. řádu
  - příčina tenzor 2. řádu, výsledek tenzor 2. řádu → vlastnost musí být tenzor 4. řádu:
  - **matice** = **tenzor4** . **matice** (násobení tenzorů)

= lineární vztah dvou tenzorů 2. řádu $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{T}.\boldsymbol{a}$

- např. tenzor napjatosti $\boldsymbol{T}_\sigma$ a tenzor elastické deformace $\boldsymbol{T}_e$ dávají do souvislosti dvě tenzorové veličiny 4. řádu: tenzor pružnosti a tenzor poddajnosti

Tenzorové veličiny 4. řádu

Tenzor napjatosti $\boldsymbol{T}_{\sigma}$ a tenzor elastické deformace $\boldsymbol{T}_{e}$ dávají do souvislosti dvě tenzorové veličiny 4. řádu:

- Tenzor pružnosti/tuhosti $\boldsymbol{C} = [C_{ijkl}]$ = *stiffnes constants/tensor*
    - $\boldsymbol{T}_{\sigma} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{T}_{e}$
- $t_{ij} = \Sigma_k \Sigma_l \; C_{ijkl} \cdot e_{kl} = C_{ijkl} \cdot t_{kl}$ – devět členů
- Tenzor poddajnosti $\boldsymbol{S} = [S_{ijkl}]$ = *compliance constants/tensor*
    - $\boldsymbol{T}_{e} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{T}_{\sigma}$
- $e_{ij} = \Sigma_k \Sigma_l \; S_{ijkl} \cdot t_{kl} = S_{ijkl} \cdot t_{kl}$ – devět členů
- je tedy $\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{S}$ a zároveň $\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{C}$

Počet parametrů

Rozměry → Řád tenzoru↓	**1**	**2**	**3**	**4**
0. - skalár	1	1	1	1
1. - vektor	1	2	3	4
2.(matice)	1	4	9	16
3. řád	1	8	27	64
4. řád	**1**	**16**	**81**	**256**

Počet parametrů

Rozměry → Řád tenzoru↓	**1**	**2**	**3**	**4**
0. - skalár	$1^0 = 1$	$2^0 = 1$	$3^0 = 1$	$4^0 = 1$
1. - vektor	$1^1 = 1$	$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$4^1 = 4$
2.(matice)	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$
3. řád	$1^3 = 1$	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$
4. řád	$1^4 = 1$	$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$

Počet parametrů

$$p = r^s$$

p – počet nezávislých prvků
r – počet rozměrů
s – řád tenzorové veličiny

Počet parametrů

Rozměry → Řád tenzoru↓	**1**	**2**	**3**	**4**
0. - skalár	$1^0 = 1$	$2^0 = 1$	$3^0 = 1$	$4^0 = 1$
1. - vektor	$1^1 = 1$	$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$4^1 = 4$
2.(matice)	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$
3. řád	$1^3 = 1$	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$
4. řád	$1^4 = 1$	$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$

Symetrické tenzory

Symetrie tenzorů

- Prvky tenzorů jsou stejné, pokud se vymění dva indexy

  např. u tenzoru napjatosti $\boldsymbol{T}_{\sigma}$ platí:

  - $t_{12} = t_{21}$, $t_{13} = t_{31}$, $t_{23} = t_{32}$ (jsou shodné)
  - dále jsou zde t_{11}, t_{22}, t_{33}
  - je zde tedy místo devíti nezávislých prvků pouze prvků šest

Počet parametrů (symetrický)

Rozměry → Řád tenzoru↓	1	2	3	4
0. – skalár	1	1	1	1
1. – vektor n	1	2	3	4
2. (matice) n.(n+1)/2	1	3	6	10
3. řádu n $_*$ n.(n+1)/2	1	6	18	40
4. řádu $[n.(n+1)/2]^2$	1	9	36	100