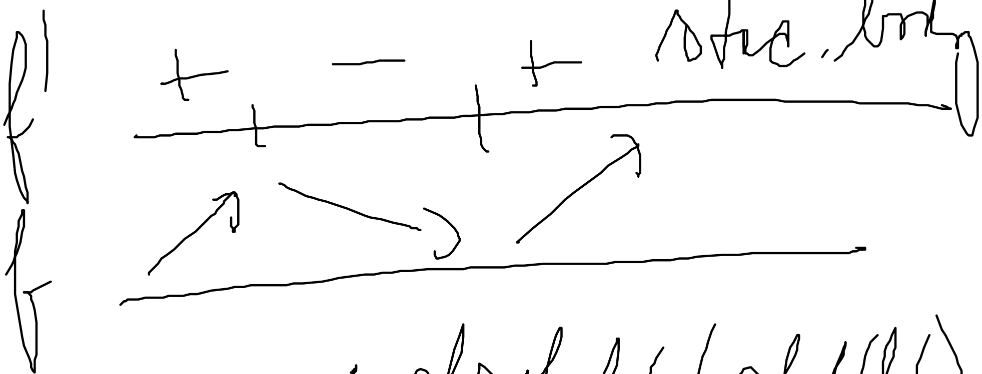
Derivace fce a extrémy fce

- lokální extrémy : $f'(x) = 0$

$\Downarrow$

stac. body



- absolutní (globální) extrémy fce na intervalu $[a,b]$

- Jestliže f je spojitá $\underline{[a,b]}$ $\Rightarrow$ nabývá své největší a nejmenší hodnoty ($\Leftrightarrow$ $\exists$ abs. extrém)

- Výpočet: $\underbrace{\text{stac. body},\ f(a),\ f(b),\ f(c_i)}_{\text{vybereme největší hodnotu}}$

1) L'Hospitalovo pravidlo (limity)
2) Průběh fce

L'Hospitalovo pravidlo

spočítat limitu $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Věta Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a je splněna jedna z těchto podmínek:

(a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

nebo

(b) $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$, $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$.

Jestliže existuje

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

(1) pak existuje

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{②}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

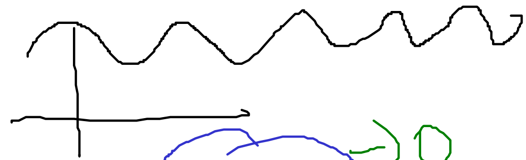
Pozn (Kdy nelze použít l'Hospital)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \neq \lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$$

neex!

$$\lim_{x\to\infty}(x+\sin x) = \infty \qquad x \to \infty, \quad \sin x \geq -1$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\cos x) \quad \text{neex.}$$



$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{\sin x}{x}\to 0, \qquad \frac{\cos x}{x}\to 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x = 0$$

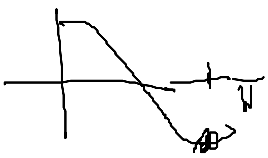
$\frac{1}{x}\to 0$, $\sin x$ ohran

$$= \frac{\lim\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{\lim\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)} = \frac{\lim 1 + \lim\frac{\sin x}{x}}{\ldots} = \frac{1+0}{1+0}$$

Př 1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x} = \left| \dfrac{1-1}{1+(-1)} \right| = \left| \dfrac{0}{0} \right| =$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{-\cos x}{-2 \sin 2x} = \left| \dfrac{0}{0} \right| =$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{-2^2 \cos 2x} = \left| \dfrac{1}{+4} \right| = \underline{\underline{\dfrac{1}{4}}}$



Neurčité výrazy (limity podílu, rozdílu, násobení)

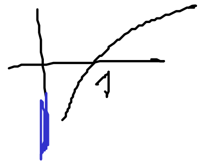
$\underbrace{\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}}_{\text{l'Hospital}}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \underbrace{0^0, \infty^0, 1^\infty}_{e^{\ln}}$

$f \cdot g$

$\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$

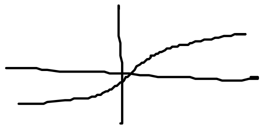
2)
$$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2} = \left|\frac{2-2=0}{0}\right| =$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{\frac{1}{2}\cdot(6+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1}{1} = \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{4}}\right| = \frac{1}{4}$$



3)
$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \left|0\cdot(-\infty)\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}(-1)\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 0$$



4)
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)\ln x = \left|0\cdot\infty\right|$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$(\ln x)^{-1}$$

$$\left(\boxed{\ln x}^{-1}\right)' = -(\ln x)^{-2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$$

$$\left(\Box^{-1}\right)' = -1\cdot\Box^{-1-1} \qquad \left(\boxed{x}^{n}\right)' = nx^{n-1}$$

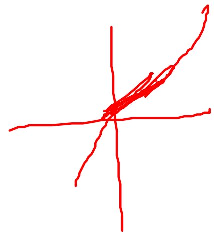
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot(\ln x)^2}{1+x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1\cdot(\ln x)^2 + \cancel{x}\cdot 2\cdot \ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2 + 2\ln x}{2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2}\ln x\cdot\frac{1}{x} + \cancel{2}\,\frac{1}{x}}{\cancel{2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x + 1}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right.$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \underline{\underline{0}}$$



Př: $$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) = \left| \frac{1}{0+} - \frac{1}{0+} \right| = |\infty - \infty|$$

$$\infty - \infty$$

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-(-\sin x)}{\cos x} = \left| \frac{0}{1} \right| = 0$$

$$= \lim_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0$$

Neurčité výrazy

$$0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

$$\square^{\bigcirc}$$

Úprava na exponenciální fci:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim e^{\ln f(x)^{g(x)}} =$$

$$= \lim e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\boxed{\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot \ln f(x)}}$$

$\ln a^r = r \ln a$

(exp je spojitá)

Př: $\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{\ln x^x} =$

$$= \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\boxed{\lim_{x\to 0+} x\ln x}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0+} x \ln x \stackrel{\text{podíl}}{=} \lim \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

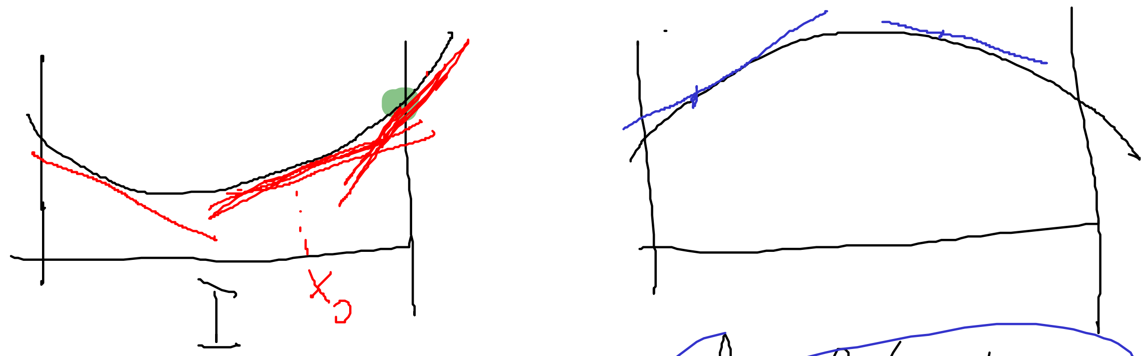
$$= \lim \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim \frac{1}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = -\lim x\cdot \ln^2 x$$

Průběh fce

- Monotonie fce, extrémy ... f'
- Konvexita, konkávnost, inflexní body ... f''
- Asymptoty grafu fce

Konvexita / konkávnost

Def



konvexní fce — graf leží nad tečnou

konkávní fce — pod tečnou

Předp. že má fce derivaci na I.

Řekneme, že fce je konvexní na I, jestliže

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

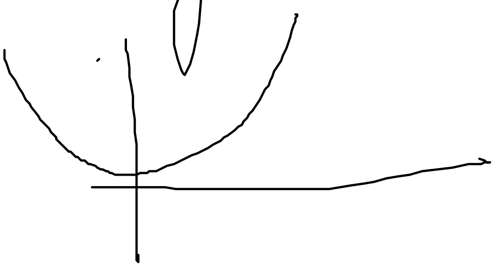
$\leq$ pro $\forall x, x_0 \in I$.

Věta Nechť $f(x)$ má druhou derivaci na I.

(a) Jestliže $f''(x) > 0$ pro $x \in I$, pak je $f(x)$ konvexní na I.

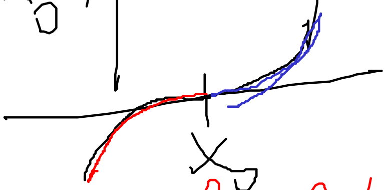
(b) — " — $f''(x) < 0$ — " — $f(x)$ je konkávní na I.

Př. $y = x^2$ konvexní na R



$y' = 2x, \; y'' = 2 > 0$

Řekneme, že x_0 je inflexní bod fce f, jestliže



vlevo od x_0 je konkávní a vpravo od x_0 je konvexní nebo naopak.

Př. $y = x^3$ $x_0 = 0$ je inflexní bod

__Věta__ nechť x_0 je inflexní bod a $\exists\, f''(x_0)$.

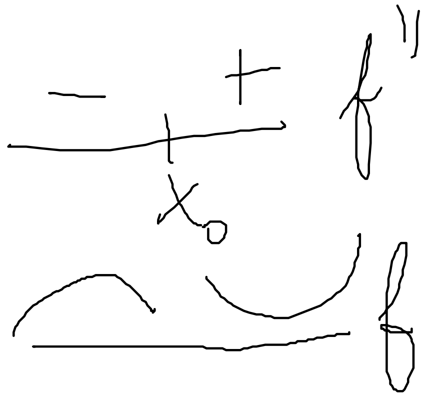
Pak $f''(x_0)=0$.

nechť $f''(x_0)=0$ a

$f''(x)<0$ pro $x<x_0$

a $f''(x)>0$ $\quad x>x_0$.

Pak x_0 inflexní bod.



Př. $f''(x)=0$ na I $\Rightarrow$ $f'(x)=c$ na I $\Rightarrow$

$f(x)=cx+d$ na I

grafem je přímka $\Rightarrow$

| $f(x)$ je konkávní i konvexní |

Př. $y=x^4-2x^2+2$

konvexní / konkávní

$$y' = 4x^3 - 4x \qquad a^2 - b^2 \quad a = \sqrt{3}x$$

$$y'' = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1) =$$

$$= 4(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1) = 0$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$+$		$-$		$+$	y''
	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		

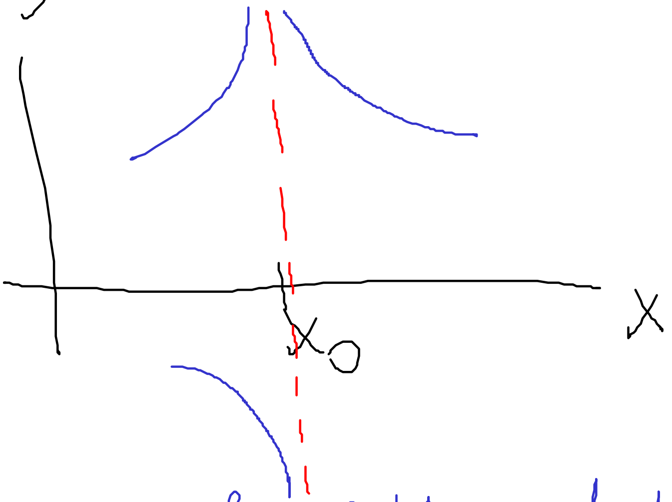
inflexní body $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

je konvexní na $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$

konkávní $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

Asymptoty fce

a) bez směrnice $\boxed{x = x_0}$



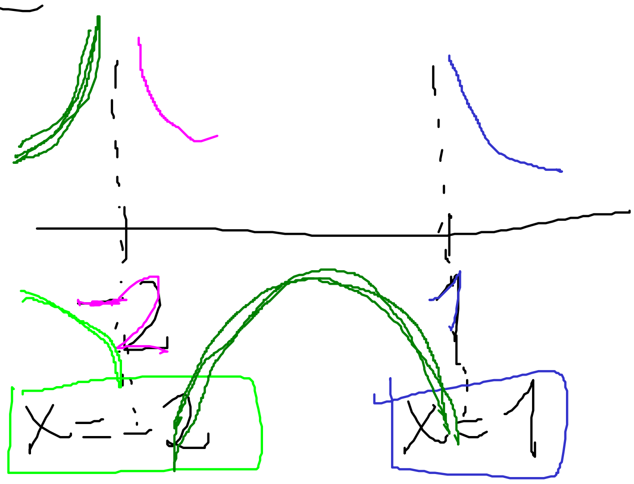
mohou být v bodech, kde fce není defin.

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = \pm\infty$$

Př.: $y = \frac{1}{x^2}$ $\quad \boxed{x = 0}$? je asymptota

$$\lim_{x\to 0\pm} \frac{1}{x^2} = \infty \checkmark$$

$$y = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$



$$\lim_{x\to 1_+} \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \left|\frac{1}{(0+)\cdot 3}\right| = \infty$$

$0-$ $\quad -\infty$

$x \to 1-$

$x \to -2+$

$$\left|\frac{1}{(-3)\cdot(0+)}\right| = \frac{1}{0-} = -\infty$$

$x \to -2-$

2) Asymptota se směrnicí

Def $\boxed{y = ax + b}$:

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$$

$(x \to -\infty)$

$$\frac{f(x)}{x} - a + \frac{b}{x}$$

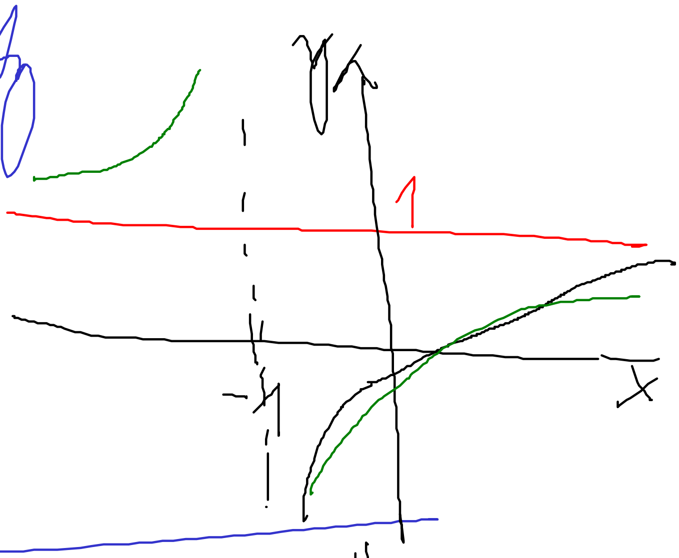
Platí: $a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$b = \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - ax\big)$$

Podobně $x \to -\infty$.

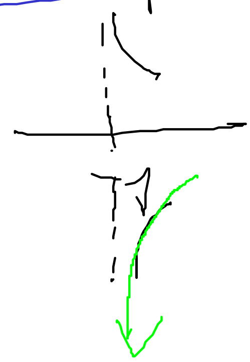
Př: Určete asymptoty

$$y = \frac{x-2}{x+1}$$



a) bez směrnice: $x = -1$

ANO



$$\lim_{x\to -1+} \frac{x-2}{x+1} = \left|\frac{-3}{0+}\right| = -\infty$$

b) se směrnicí: $y = ax + b$ $\boxed{y = 1}$

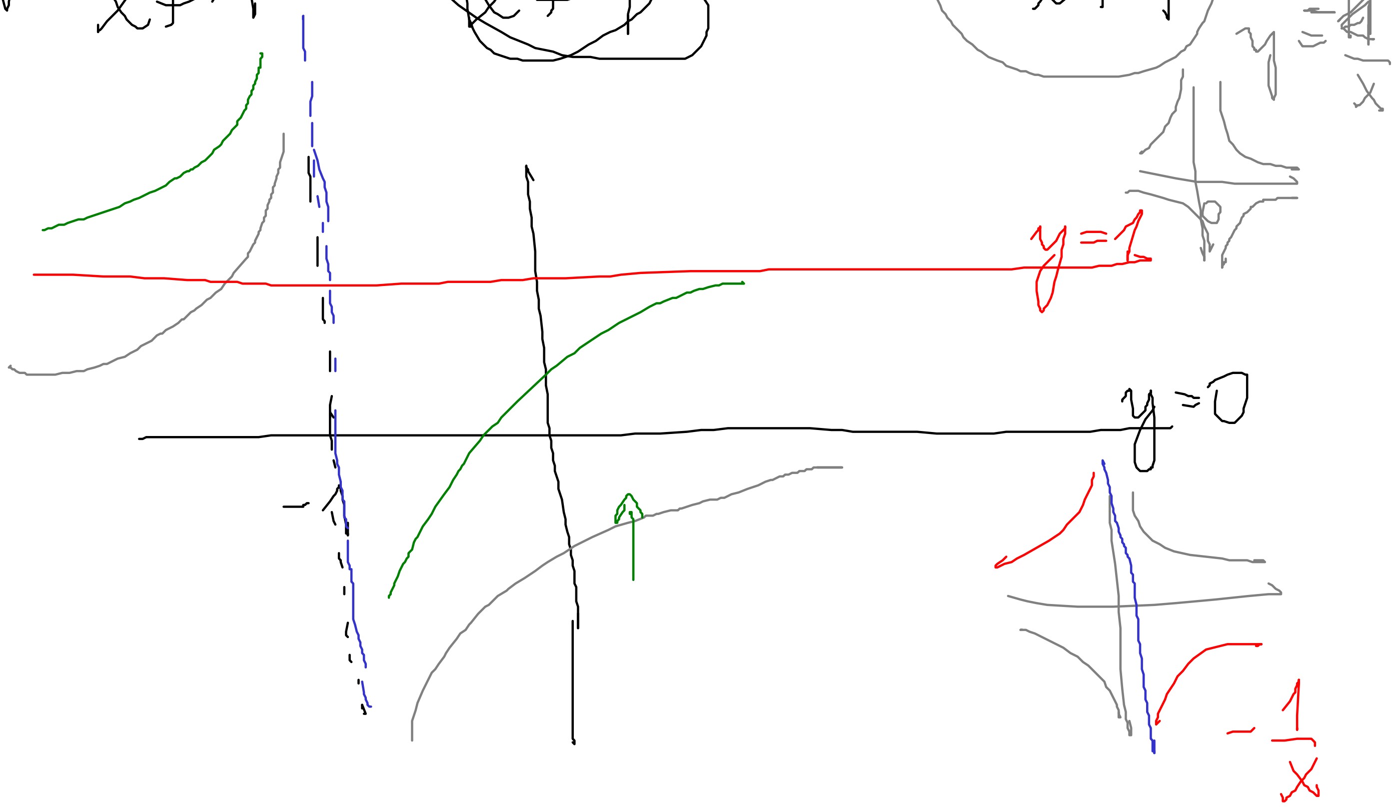
$$a = \lim_{\substack{x\to\infty \\ x\to -\infty}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-2}{x+1}}{x} = 0$$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty \\ x\to -\infty}} \frac{x-2}{x(x+1)} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x+1} = 0$$

$x^2 + x$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1$$

$$y = \frac{x-2}{x+1} = \frac{x+1-3}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}$$



Průběh fce

1) $D(f)$, (průsečíky nulové body, kde je f kladná a kde záporná)

2) $f'(x)$:
   - $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ roste
   - $ < 0 \quad f$ klesá
   - lokální extrémy

3) $f''(x)$:
   - $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ konvexní
   - $ < 0 \quad$ konkávní
   - inflexní body

4) Asymptoty

5) Graf fce

Př: $y = x^3 - 3x^2 + 4$ $\quad -1 - 3 + 4 = 0$

$D = \mathbb{R}$ $\quad 8 - 12 + 4 = 0$

$y' = 3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0 \quad x = 0, \; x = 2$

(stac. body)

$+ \quad - \quad + \quad y'$

$0 \quad 2$

$\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad y$

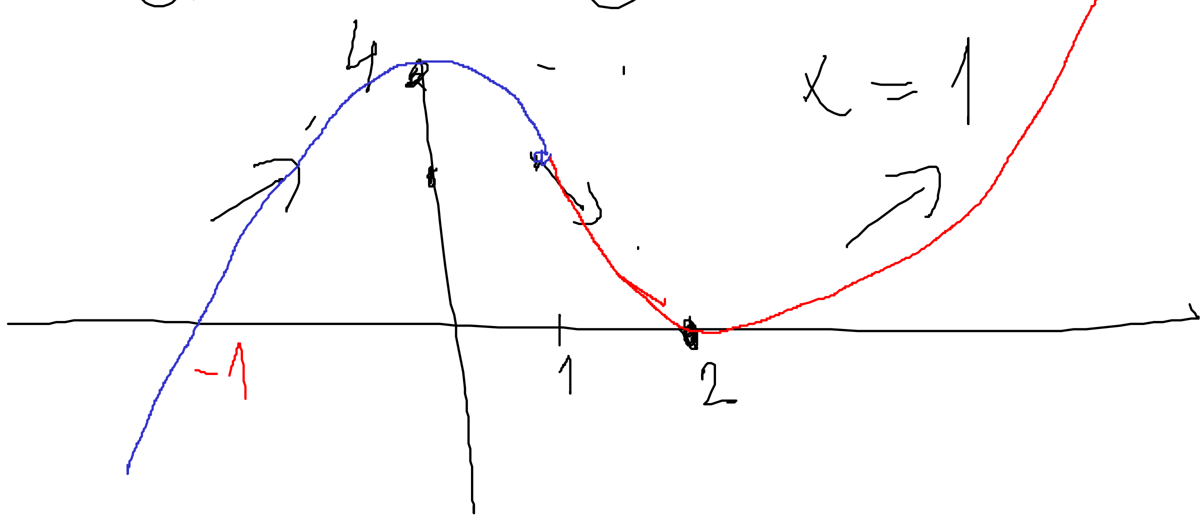
lok. max v bodě $x = 0 \quad f(0) = 4$

min $\quad x = 2 \quad f(2) = 0$

$(x-1) > 0$

$y'' = 6x - 6 = 0$

$x = 1$



nema

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{3} - 3x^{2} + 4}{x^{1}} = \infty$$