

# Lineární algebra

M1030 Matematika pro biology

6. a 13. 11. 2020

## Základní pojmy

Motivace

Matice a vektory

„Klasifikace“ matic

Operace s maticemi

Řešení soustav rovnic – Gaussova eliminace

Determinanty

Řešení soustav rovnic – Cramerovo pravidlo

Regulární matice

Aplikace – maticové populační modely

# Základní pojmy

# Motivace

- Eulerův model růstu populace:  $x(t + 1) = rx(t)$   
 $x(t)$  ... velikost populace v čase  $t$   
 $r$  ... růstový koeficient ( $r = 1 + b - d$ ,  $b$  porodnost,  $d$  úmrtnost)



- Caswellův model růstu populace strukturované podle plodnosti:

$$\begin{aligned}x(t + 1) &= \sigma_1(1 - \gamma)x(t) + fy(t) \\y(t + 1) &= \sigma_1\gamma x(t) + \sigma_2 y(t)\end{aligned}$$

$x(t)$  ... množství juvenilních jedinců

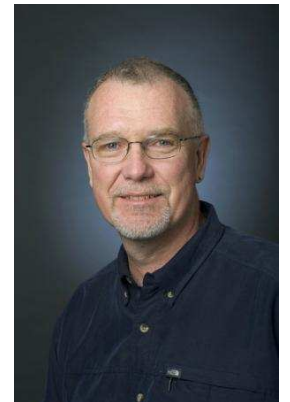
$y(t)$  ... množství plodných jedinců

$f$  ... očekávané (průměrné) množství potomků plodného jedince za jednotku času

$\gamma$  ... P(juvenilní jedinec během časové jednotky dospěje)

$\sigma_1$  ... P(juvenilní jedinec přežije časovou jednotku)

$\sigma_2$  ... P(plodný jedinec přežije časovou jednotku)



# Motivace

- Eulerův model růstu populace:  $x(t + 1) = rx(t)$
- Caswellův model růstu populace strukturované podle plodnosti:

$$\begin{aligned}x(t + 1) &= \sigma_1(1 - \gamma)x(t) + fy(t) \\y(t + 1) &= \sigma_1\gamma x(t) + \sigma_2 y(t)\end{aligned}$$

Označení:  $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_1(1 - \gamma) & f \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix}$

# Motivace

- Eulerův model růstu populace:  $x(t + 1) = rx(t)$
- Caswellův model růstu populace strukturované podle plodnosti:  $x(t + 1) = Rx(t)$

$$\begin{aligned}x(t + 1) &= \sigma_1(1 - \gamma)x(t) + f y(t) \\y(t + 1) &= \sigma_1\gamma x(t) + \sigma_2 y(t)\end{aligned}$$

Označení:  $x(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ,  $R = \begin{pmatrix} \sigma_1(1 - \gamma) & f \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix}$

# Matice a vektory

*Matice typu*  $(m, n)$  ... tabulka čísel o  $m$  řádcích a  $n$  sloupcích

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \dots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

# Matice a vektory

Matice typu  $(m, n)$  ... tabulka čísel o  $m$  řádcích a  $n$  sloupcích

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \dots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Příklady:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3,1415927 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sigma_1(1 - \gamma) & f \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad C = (7)$$

A je matice typu  $(2, 3)$ , B a R jsou matice typu  $(2, 2)$ , C je matice typu  $(1, 1)$ .

# Matice a vektory

Matice typu  $(m, n)$  ... tabulka čísel o  $m$  řádcích a  $n$  sloupcích

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \dots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Příklady:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3,1415927 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sigma_1(1 - \gamma) & f \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad C = (7)$$

A je matice typu  $(2, 3)$ , B a R jsou matice typu  $(2, 2)$ , C je matice typu  $(1, 1)$ .

Číslo lze považovat za speciální případ matice, matice jsou zobecněním čísel.



# Matice a vektory

Matice typu  $(m, n)$  ... tabulka čísel o  $m$  řádcích a  $n$  sloupcích

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \dots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$m$ -rozměrný sloupcový vektor je matice typu  $(m, 1)$ ,  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$

# Matice a vektory

Matice typu  $(m, n)$  ... tabulka čísel o  $m$  řádcích a  $n$  sloupcích

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \dots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$m$ -rozměrný sloupcový vektor je matice typu  $(m, 1)$ ,  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$

$n$ -rozměrný řádkový vektor je matice typu  $(1, n)$ ,

$$\mathbf{w} = (w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad \dots \quad w_n) = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$$

# „Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice  $A$  typu  $m, n$  je

# „Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice  $A$  typu  $m, n$  je

- čtvercová řádu  $n$ , pokud  $m = n$

# „Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice  $A$  typu  $m, n$  je

- čtvercová řádu  $n$ , pokud  $m = n$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3,1415927 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \dots$$

# „Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice  $A$  typu  $m, n$  je

- čtvercová řádu  $n$ , pokud  $m = n$
- horní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

# „Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice  $A$  typu  $m, n$  je

- čtvercová řádu  $n$ , pokud  $m = n$
- horní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3,1415927 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \dots$$

# „Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice  $A$  typu  $m, n$  je

- čtvercová řádu  $n$ , pokud  $m = n$
- horní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- dolní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$



# „Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice  $A$  typu  $m, n$  je

- čtvercová řádu  $n$ , pokud  $m = n$
- horní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- dolní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3,1415927 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

# „Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice  $A$  typu  $m, n$  je

- čtvercová řádu  $n$ , pokud  $m = n$
- horní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- dolní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- diagonální, pokud  $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$   
(je současně horní i dolní trojúhelníková)

# „Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice  $A$  typu  $m, n$  je

- čtvercová řádu  $n$ , pokud  $m = n$
- horní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- dolní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- diagonální, pokud  $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$   
(je současně horní i dolní trojúhelníková)

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3,1415927 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

# „Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice  $A$  typu  $m, n$  je

- čtvercová řádu  $n$ , pokud  $m = n$
- horní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- dolní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- diagonální, pokud  $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$   
(je současně horní i dolní trojúhelníková)
- symetrická, pokud je čtvercová a  $(\forall i, j) a_{ij} = a_{ji}$

# „Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice  $A$  typu  $m, n$  je

- čtvercová řádu  $n$ , pokud  $m = n$
- horní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- dolní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- diagonální, pokud  $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$   
(je současně horní i dolní trojúhelníková)
- symetrická, pokud je čtvercová a  $(\forall i, j) a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3,1415927 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & 7 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

# „Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice  $A$  typu  $m, n$  je

- čtvercová řádu  $n$ , pokud  $m = n$
- horní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- dolní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- diagonální, pokud  $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$   
(je současně horní i dolní trojúhelníková)
- symetrická, pokud je čtvercová a  $(\forall i, j) a_{ij} = a_{ji}$
- nulová, pokud  $(\forall i, j) a_{ij} = 0$ ,  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

# „Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice  $A$  typu  $m, n$  je

- čtvercová řádu  $n$ , pokud  $m = n$
- horní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- dolní trojúhelníková, pokud  $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- diagonální, pokud  $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$   
(je současně horní i dolní trojúhelníková)
- symetrická, pokud je čtvercová a  $(\forall i, j) a_{ij} = a_{ji}$

- nulová, pokud  $(\forall i, j) a_{ij} = 0$ ,  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- jednotková, pokud  $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$   $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$



# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

**1. unární operace** (matice  $\mapsto$  matice;  $A \mapsto B$ )

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

**1. unární operace** (matice  $\mapsto$  matice;  $A \mapsto B$ )

- *Transpozice matice*:  $A^T = A' = B$   
Matice B je typu  $(n, m)$ ,  $b_{ij} = a_{ji}$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

## 1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; $A \mapsto B$ )

- *Transpozice matice*:  $A^T = A' = B$   
Matice B je typu  $(n, m)$ ,  $b_{ij} = a_{ji}$

Příklady:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3,14 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3,14 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}^T = (1 \quad -2 \quad 3), \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & \frac{7}{8} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

**1. unární operace** (matice  $\mapsto$  matice;  $A \mapsto B$ )

- *Transpozice matice*:  $A^T = A' = B$   
Matice B je typu  $(n, m)$ ,  $b_{ij} = a_{ji}$

Platí: čtvercová matice A je symetrická  $\Leftrightarrow A = A^T$ .

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

## 1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; $A \mapsto B$ )

- *Transpozice matice*:  $A^T = A' = B$   
Matice B je typu  $(n, m)$ ,  $b_{ij} = a_{ji}$

Platí: čtvercová matice A je symetrická  $\Leftrightarrow A = A^T$ .

- *Opačná matice*:  $-A = B$   
Matice B je téhož typu  $(m, n)$ ,  $b_{ij} = -a_{ij}$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

## 1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; $A \mapsto B$ )

- *Transpozice matice:*  $A^T = A' = B$   
Matice B je typu  $(n, m)$ ,  $b_{ij} = a_{ji}$

Platí: čtvercová matice A je symetrická  $\Leftrightarrow A = A^T$ .

- *Opačná matice:*  $-A = B$   
Matice B je téhož typu  $(m, n)$ ,  $b_{ij} = -a_{ij}$

Příklad:

$$-\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3,14 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & -3,14 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

## 1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; $A \mapsto B$ )

- *Transpozice matice*:  $A^T = A' = B$   
Matice B je typu  $(n, m)$ ,  $b_{ij} = a_{ji}$

Platí: čtvercová matice A je symetrická  $\Leftrightarrow A = A^T$ .

- *Opačná matice*:  $-A = B$   
Matice B je téhož typu  $(m, n)$ ,  $b_{ij} = -a_{ij}$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

**2. vnější operace** (číslo, matice  $\mapsto$  matice;  $c, A \mapsto B$ )



# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

**2. vnější operace** (číslo, matice  $\mapsto$  matice;  $c, A \mapsto B$ )

- *Násobení matice číslem (skalárem):*  $cA = B$   
Matice B je téhož typu  $(m, n)$ ,  $b_{ij} = ca_{ij}$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

**2. vnější operace** (číslo, matice  $\mapsto$  matice;  $c, A \mapsto B$ )

- *Násobení matice číslem (skalárem):*  $cA = B$   
Matice B je téhož typu  $(m, n)$ ,  $b_{ij} = ca_{ij}$

Příklad:

$$-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3,14 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1,57 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

**2. vnější operace** (číslo, matice  $\mapsto$  matice;  $c, A \mapsto B$ )

- *Násobení matice číslem (skalárem):*  $cA = B$   
Matice B je téhož typu  $(m, n)$ ,  $b_{ij} = ca_{ij}$

Platí

$$-A = (-1)A$$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

**3. binární operace** (matice, matice  $\mapsto$  matice;  $A, B \mapsto C$ )

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

**3. binární operace** (matice, matice  $\mapsto$  matice;  $A, B \mapsto C$ )

- *Součet matic*:  $A + B = C$

Obě matice B a C jsou téhož typu  $(m, n)$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

## 3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $A, B \mapsto C$ )

- *Součet matic:*  $A + B = C$

Obě matice B a C jsou téhož typu  $(m, n)$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Příklady:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3,14 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0,86 & \frac{2}{4} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+(-1) & 3+(-2) \\ -2+(-1) & 3,14+0,86 & -\frac{1}{2}+\frac{2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

## 3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $A, B \mapsto C$ )

- *Součet matic:*  $A + B = C$

Obě matice B a C jsou téhož typu  $(m, n)$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Příklady:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3,14 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0,86 & \frac{2}{4} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+(-1) & 3+(-2) \\ -2+(-1) & 3,14+0,86 & -\frac{1}{2}+\frac{2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

**3. binární operace** (matice, matice  $\mapsto$  matice;  $A, B \mapsto C$ )

- *Součet matic*:  $A + B = C$

Obě matice B a C jsou téhož typu  $(m, n)$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová  $\Rightarrow A + A^T$  je symetrická



# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

**3. binární operace** (matice, matice  $\mapsto$  matice;  $A, B \mapsto C$ )

- *Součet matic*:  $A + B = C$

Obě matice B a C jsou téhož typu  $(m, n)$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová  $\Rightarrow A + A^T$  je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

## 3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $A, B \mapsto C$ )

- *Součet matic:*  $A + B = C$

Obě matice B a C jsou téhož typu  $(m, n)$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová  $\Rightarrow A + A^T$  je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad \text{asociativita}$$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

## 3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $A, B \mapsto C$ )

- *Součet matic:*  $A + B = C$

Obě matice B a C jsou téhož typu  $(m, n)$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová  $\Rightarrow A + A^T$  je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad \textit{asociativita}$$

$$A + B = B + A \quad \textit{komutativita}$$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

## 3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $A, B \mapsto C$ )

- *Součet matic:*  $A + B = C$

Obě matice B a C jsou téhož typu  $(m, n)$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová  $\Rightarrow A + A^T$  je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

$$\begin{array}{ll} (A + B) + C = A + (B + C) & \text{asociativita} \\ A + B = B + A & \text{komutativita} \\ A + O = O + A = A & \text{existuje neutrální prvek} \end{array}$$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

## 3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $A, B \mapsto C$ )

- *Součet matic:*  $A + B = C$

Obě matice B a C jsou téhož typu  $(m, n)$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová  $\Rightarrow A + A^T$  je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

$(A + B) + C = A + (B + C)$	<i>asociativita</i>
$A + B = B + A$	<i>komutativita</i>
$A + O = O + A = A$	<i>existuje neutrální prvek</i>
$A + (-A) = O$	<i>ke každé matici existuje opačný prvek</i>

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

## 3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $A, B \mapsto C$ )

- *Součet matic:*  $A + B = C$

Obě matice B a C jsou téhož typu  $(m, n)$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová  $\Rightarrow A + A^T$  je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

$(A + B) + C = A + (B + C)$	<i>asociativita</i>
$A + B = B + A$	<i>komutativita</i>
$A + O = O + A = A$	<i>existuje neutrální prvek</i>
$A + (-A) = O$	<i>ke každé matici existuje opačný prvek</i>

Matice spolu s operací sčítání tvoří Abelovskou grupu.

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

**3. binární operace** (matice, matice  $\mapsto$  matice;  $A, B \mapsto C$ )

- *Součet matic*:  $A + B = C$

Obě matice B a C jsou téhož typu  $(m, n)$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

**3. binární operace** (matice, matice  $\mapsto$  matice;  $A, B \mapsto C$ )

- *Součin matic:*  $AB = C$

Matice B je typu  $(n, p)$  a matice C je typu  $(m, p)$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$



# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

**3. binární operace** (matice, matice  $\mapsto$  matice;  $A, B \mapsto C$ )

- *Součin matic:*  $AB = C$

Matice B je typu  $(n, p)$  a matice C je typu  $(m, p)$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Příklady:

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

## 3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $A, B \mapsto C$ )

- *Součin matic:*  $AB = C$

Matice B je typu  $(n, p)$  a matice C je typu  $(m, p)$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Příklady:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 \\ -3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) & -3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ 6 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) & 6 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -1 \\ 0 & 22 \end{pmatrix},$$

BA ... nelze vynásobit

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

## 3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $A, B \mapsto C$ )

- *Součin matic:*  $AB = C$

Matice B je typu  $(n, p)$  a matice C je typu  $(m, p)$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Příklady:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 19 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -11 & 1 \end{pmatrix}$$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

## 3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $A, B \mapsto C$ )

- *Součin matic:*  $AB = C$

Matice B je typu  $(n, p)$  a matice C je typu  $(m, p)$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Příklady:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

## 3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $A, B \mapsto C$ )

- *Součin matic:*  $AB = C$

Matice B je typu  $(n, p)$  a matice C je typu  $(m, p)$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Příklady:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

**3. binární operace** (matice, matice  $\mapsto$  matice;  $A, B \mapsto C$ )

- *Součin matic:*  $AB = C$

Matice B je typu  $(n, p)$  a matice C je typu  $(m, p)$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Vlastnosti násobení matic:

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

## 3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $A, B \mapsto C$ )

- *Součin matic:*  $AB = C$

Matice B je typu  $(n, p)$  a matice C je typu  $(m, p)$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Vlastnosti násobení matic:

$$(AB)C = A(BC) \quad \text{asociativita}$$

# Operace s maticemi

A ... matice typu  $(m, n)$

## 3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $A, B \mapsto C$ )

- *Součin matic:*  $AB = C$

Matice B je typu  $(n, p)$  a matice C je typu  $(m, p)$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Vlastnosti násobení matic:

$$\begin{array}{ll} (AB)C = A(BC) & \text{asociativita} \\ m = n \Rightarrow AE = EA = A & \text{k čtvercové matici existuje neutrální prvek} \end{array}$$



Základní pojmy

---

**Řešení soustav rovnic – Gaussova eliminace**

Příklad

Soustava lineárních rovnic

Gaussova eliminační metoda

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Závěrečná poznámka

Determinanty

---

Řešení soustav rovnic – Cramerovo pravidlo

---

Regulární matice

---

Aplikace – maticové populační modely

---

# Řešení soustav rovnic – Gaussova eliminace

# Příklad

$$2x + 3y = 7$$

$$x + 2y = 4$$

---

# Příklad

$$2x + 3y = 7$$

$$x + 2y = 4$$

---

$$x + 2y = 4$$

$$2x + 3y = 7$$

# Příklad

$$2x + 3y = 7$$

$$x + 2y = 4$$

---

$$x + 2y = 4 \quad | \cdot (-2)$$

$$2x + 3y = 7$$

## Příklad

$$2x + 3y = 7$$

$$x + 2y = 4$$

---

$$x + 2y = 4 \quad | \cdot (-2)$$

$$2x + 3y = 7$$

$$-2x - 4y = -8$$

$$2x + 3y = 7$$

# Příklad

$$2x + 3y = 7$$

$$x + 2y = 4$$

---

$$x + 2y = 4 \quad | \cdot (-2)$$

$$2x + 3y = 7$$

$$-2x - 4y = -8$$

$$2x + 3y = 7 \quad +$$

# Příklad

$$2x + 3y = 7$$

$$x + 2y = 4$$

---

$$x + 2y = 4 \quad | \cdot (-2)$$

$$2x + 3y = 7$$

$$-2x - 4y = -8$$

$$2x + 3y = 7 \quad +$$

$$x + 2y = 4$$

$$-y = -1$$

## Příklad

$$2x + 3y = 7$$

$$x + 2y = 4$$

---

$$x + 2y = 4 \quad | \cdot (-2)$$

$$2x + 3y = 7$$

$$-2x - 4y = -8$$

$$2x + 3y = 7 \quad +$$

$$x + 2y = 4$$

$$-y = -1$$

$$y = 1, \quad x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$$



## Příklad

$$2x + 3y = 7$$

$$x + 2y = 4$$

---

$$x + 2y = 4 \quad | \cdot (-2)$$

$$2x + 3y = 7$$

$$-2x - 4y = -8$$

$$2x + 3y = 7 \quad +$$

$$x + 2y = 4$$

$$-y = -1$$

$$y = 1, \quad x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

---

## Příklad

$$2x + 3y = 7$$

$$x + 2y = 4$$

---

$$x + 2y = 4 \quad | \cdot (-2)$$

$$2x + 3y = 7$$

$$-2x - 4y = -8$$

$$2x + 3y = 7 \quad +$$

$$x + 2y = 4$$

$$-y = -1$$

$$y = 1, \quad x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

---

Označení:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Soustava rovnic:  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

## Příklad

$$2x + 3y = 7$$

$$x + 2y = 4$$

---

$$\begin{array}{r} x + 2y = 4 \quad | \cdot (-2) \\ 2x + 3y = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x - 4y = -8 \\ 2x + 3y = 7 \quad + \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ -y = -1 \end{array}$$

$$y = 1, \quad x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

---

Označení:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Soustava rovnic:  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Ještě stručnější zápis:  $\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$

## Příklad

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

---

$$\begin{aligned}x + 2y &= 4 & | \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}-2x - 4y &= -8 \\ 2x + 3y &= 7 & +\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -8 \\ 2 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}x + 2y &= 4 \\ -y &= -1\end{aligned}$$

$$y = 1, \quad x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

---

Označení:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Soustava rovnic:  $Ax = b$

Ještě stručnější zápis:  $\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$

# Soustava lineárních rovnic

Soustava (systém)  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots & + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

# Soustava lineárních rovnic

Soustava (systém)  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots & + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Maticový zápis:  $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \dots \textit{matice soustavy} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \dots \textit{vektor pravých stran}$$
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \dots \textit{vektor neznámých}$$

# Soustava lineárních rovnic

Soustava (systém)  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots & + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Maticový zápis:  $Ax = b$

Všechny informace o systému jsou obsaženy v *rozšířené matici soustavy*

$$(A|b) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

# Gaussova eliminační metoda

*Elementární řádkové transformace matice:*

- výměna (přehození) řádků
- vynásobení řádku nenulovým číslem
- přičtení jednoho řádku jinému



# Gaussova eliminační metoda

*Elementární řádkové transformace matice:*

- výměna (přehození) řádků
- vynásobení řádku nenulovým číslem
- přičtení jednoho řádku jinému

Označení:  $A \sim B \dots$  „matice B vznikla z matice A pomocí elementárních transformací.“

# Gaussova eliminační metoda

*Elementární řádkové transformace matice:*

- výměna (přehození) řádků
- vynásobení řádku nenulovým číslem
- přičtení jednoho řádku jinému

Označení:  $A \sim B \dots$  „matice B vznikla z matice A pomocí elementárních transformací.“

**Algoritmus metody:**

1. Užitím elementárních řádkových transformací převedeme rozšířenou matici soustavy na vhodnou horní trojúhelníkovou.
2. Výslednou matici přepíšeme do tvaru soustavy rovnic a vypočítáme jednotlivé složky řešení.

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}3x + y &= 0 \\x - 2y + 4z &= 1 \\2x + y - z &= -1\end{aligned}$$

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}3x + y &= 0 \\x - 2y + 4z &= 1 \\2x + y - z &= -1\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}3x + y &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

přehození 1. a 2. řádku

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}3x + y &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim$$

vynásobení 1. řádku číslem  $-3$

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}3x + y &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)\end{aligned}$$

přičtení 1. řádku ke 2.

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}3x + y &= 0 \\x - 2y + 4z &= 1 \\2x + y - z &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)\end{aligned}$$

vynásobení 1. řádku číslem  $\frac{2}{3}$



# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}3x + y &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim\end{aligned}$$

přičtení 1. řádku k 3.

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}3x + y &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right)\end{aligned}$$

vynásobení 1. řádku číslem  $-\frac{1}{2}$

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}3x + y &= 0 \\x - 2y + 4z &= 1 \\2x + y - z &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \\&\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \\&\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right)\end{aligned}$$

vynásobení 2. řádku číslem 5

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}3x + y &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array} \right) \sim\end{aligned}$$

vynásobení 3. řádku číslem  $-7$

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}3x + y &= 0 \\x - 2y + 4z &= 1 \\2x + y - z &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \\&\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \\&\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array} \right) \sim \\&\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right)\end{aligned}$$

přičtení 2. řádku k 3.

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}3x + y &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right)\end{aligned}$$

vynásobení 2. řádku číslem  $\frac{1}{5}$

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}3x + y &= 0 \\x - 2y + 4z &= 1 \\2x + y - z &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)\end{aligned}$$

vynásobení 3. řádku číslem  $\frac{1}{3}$

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}3x + y &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3\end{array}\right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21\end{array}\right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x - 2y + 4z &= 1 \\ 7y - 12z &= -3 \\ z &= 2\end{aligned}$$



# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}3x + y &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3\end{array}\right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21\end{array}\right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x - 2y + 4z &= 1 \\ 7y - 12z &= -3 \\ z &= 2\end{aligned}$$

$$z = 2$$

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}3x + y &= 0 \\x - 2y + 4z &= 1 \\2x + y - z &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & 0 & 0 \\1 & -2 & 4 & 1 \\2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\3 & 1 & 0 & 0 \\2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 6 & -12 & -3 \\3 & 1 & 0 & 0 \\2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) \sim \\&\sim \left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 6 & -12 & -3 \\0 & 7 & -12 & -3 \\2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 4 & -8 & -2 \\0 & 7 & -12 & -3 \\2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 4 & -8 & -2 \\0 & 7 & -12 & -3 \\0 & 5 & -9 & -3\end{array}\right) \sim \\&\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\0 & 7 & -12 & -3 \\0 & 5 & -9 & -3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\0 & 35 & -60 & -15 \\0 & 5 & -9 & -3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\0 & 35 & -60 & -15 \\0 & -35 & 63 & 21\end{array}\right) \sim \\&\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\0 & 35 & -60 & -15 \\0 & 0 & 3 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\0 & 7 & -12 & -3 \\0 & 0 & 3 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 1 \\0 & 7 & -12 & -3 \\0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x - 2y + 4z &= 1 \\7y - 12z &= -3 \\z &= 2\end{aligned}$$

$$z = 2, y = \frac{1}{7}(-3 + 12 \cdot 2) = 3$$

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}3x + y &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x - 2y + 4z &= 1 \\ 7y - 12z &= -3 \\ z &= 2\end{aligned}$$

$$z = 2, y = \frac{1}{7}(-3 + 12 \cdot 2) = 3, x = 1 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = -1$$

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$2x + 3y - z = -12$$

$$x + 2y + z = 9$$

$$5x + 8y + 2z = 15$$

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$2x + 3y - z = -12$$

$$x + 2y + z = 9$$

$$5x + 8y + 2z = 15$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -12 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 8 & 2 & 15 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & -2 & -3 & -30 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & 3 & 30 \end{array} \right)$$

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}2x + 3y - z &= -12 \\ x + 2y + z &= 9 \\ 5x + 8y + 2z &= 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -12 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 8 & 2 & 15 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & -2 & -3 & -30 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & 3 & 30 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right)\end{aligned}$$

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}2x + 3y - z &= -12 \\ x + 2y + z &= 9 \\ 5x + 8y + 2z &= 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -12 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 8 & 2 & 15 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & -2 & -3 & -30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & 3 & 30 \end{array}\right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)\end{aligned}$$

$$z = 10, y = 0, x = -1$$

# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5\end{aligned}$$



# Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -6 \end{array} \right) \sim \\&\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 9 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \\&\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)\end{aligned}$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -1$$

# Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Příklad:

$$\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{array} \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ y = 1 \end{array} \quad y = 1, x = 2$$

# Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Příklad:

$$\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{array} \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ y = 1 \end{array} \quad y = 1, x = 2$$

$$\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 7 \end{array} \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 0 = 1 \end{array}$$

# Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Příklad:

$$\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{array} \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ y = 1 \end{array} \quad y = 1, x = 2$$

$$\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 7 \end{array} \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 0 = 1 \end{array}$$

úloha je neřešitelná

# Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Příklad:

$$\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{array} \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ y = 1 \end{array} \quad y = 1, x = 2$$

$$\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 7 \end{array} \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 0 = 1 \end{array}$$

úloha je neřešitelná

$$\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{array} \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 0 = 0 \end{array}$$

# Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Příklad:

$$\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{array} \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ y = 1 \end{array} \quad y = 1, x = 2$$

$$\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 7 \end{array} \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 0 = 1 \end{array}$$

úloha je neřešitelná

$$\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{array} \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 0 = 0 \end{array}$$

úloha je řešitelná, řešení není jednoznačné;  
druhou neznámou volíme jako parametr:  $x = 4 - 2y$

# Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

*Hodnota matice  $A$ ,  $h(A)$ :*

počet nenulových řádků v matici, která vznikne z matice  $A$  Gaussovou eliminací.

# Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

*Hodnota matice A,  $h(A)$ :*

počet nenulových řádků v matici, která vznikne z matice A Gaussovou eliminací.

**Kronckerova-Capelliho věta:**

Soustava  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých

$$Ax = b.$$



# Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Hodnost matice  $A$ ,  $h(A)$ :

počet nenulových řádků v matici, která vznikne z matice  $A$  Gaussovou eliminací.

## Kronckerova-Capelliho věta:

Soustava  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých

$$Ax = b.$$

- $h(A) < h(A|b) \Rightarrow$  úloha nemá řešení
- $h(A) = h(A|b) < n \Rightarrow$  úloha má řešení, řešení není jednoznačné
- $h(A) = h(A|b) = n \Rightarrow$  úloha má jednoznačné řešení

# Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Hodnota matice  $A$ ,  $h(A)$ :

počet nenulových řádků v matici, která vznikne z matice  $A$  Gaussovou eliminací.

## Kronckerova-Capelliho věta:

Soustava  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých

$$Ax = b.$$

$$h(A) < h(A|b) \quad \Rightarrow \quad \text{úloha nemá řešení}$$

$$h(A) = h(A|b) < n \quad \Rightarrow \quad \text{úloha má řešení, řešení není jednoznačné}$$

$$h(A) = h(A|b) = n \quad \Rightarrow \quad \text{úloha má jednoznačné řešení}$$

Ve druhém případě lze řešení vyjádřit pomocí  $n - h(A)$  parametrů.

# Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Příklad:

$$2x + 3y + z = 1$$

$$x + 4y - 2z = 3$$

$$x + 3y - z = 2$$

# Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Příklad:

$$\begin{aligned}2x + 3y + z &= 1 \\x + 4y - 2z &= 3 \\x + 3y - z &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

Řešení není jednoznačné,  $y = 1 + z$ ,  $x = 1 - 2y = 1 - 2(1 + z) = -1 - 2z$

# Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Předpokládáme, že matice soustavy je typu  $m, n$ , tj. jedná se o soustavu  $m$  rovnic o  $n$  neznámých.

Pro zjednodušení zápisu budeme v rozšířené matici soustavy prvky v posledním sloupci značit symboly  $a_{i,j+1}$ .

**Algoritmus** úpravy rozšířené matice soustavy:

1.  $j := 1$  (indexu  $j$  přiřad' hodnotu 1)
2. mezi prvky  $a_{j,j}, a_{j+1,j}, a_{j+2,j}, \dots, a_{m,j}$  najdi  $a_{k,j}$  takový, že  $(\forall i = j, j+1, j+2, \dots, m) |a_{k,j}| \geq |a_{i,j}|$  (v  $j$ -tém sloupci najdi prvek s největší absolutní hodnotou, příslušný řádek považuj za  $k$ -tý)
3. pokud  $|a_{k,j}| = 0$ , jdi na krok 7.
4. přehod'  $j$ -tý a  $k$ -tý řádek
5.  $j$ -tý řádek vynásob číslem  $\frac{1}{a_{j,j}}$
6. dělej pro každé  $i \neq j$ : k  $i$ -tému řádku přičti  $j$ -tý řádek násobený číslem  $-a_{i,j}$
7.  $j := j + 1$  (index  $j$  zvětši o 1)
8. pokud  $j \leq m$ , jdi zpět na krok 2., jinak konec

# Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned}3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3\end{aligned}$$

# Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned}3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right)$$

# Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned}3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right)$$



# Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned}3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right)$$

# Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned}3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right)$$

# Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned}3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)\end{aligned}$$

# Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned}3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) \sim \\ \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)\end{aligned}$$

# Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned}3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{11} & -\frac{42}{11} \end{array} \right)\end{aligned}$$

# Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned}3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) \sim \\ \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \\ \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{11} & -\frac{42}{11} \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)\end{aligned}$$

# Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned}3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{11} & -\frac{42}{11} \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)\end{aligned}$$

# Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned}3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{11} & -\frac{42}{11} \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)\end{aligned}$$

$$x = -3, y = 5, z = 6$$



## Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice  $A$  odpovídá násobení matice  $A$  jistou maticí zleva.

# Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice  $A$  odpovídá násobení matice  $A$  jistou maticí zleva.

- Vynásobení  $p$ -tého řádku číslem  $c$ : matice  $R$ ,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

# Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice  $A$  odpovídá násobení matice  $A$  jistou maticí zleva.

- Vynásobení  $p$ -tého řádku číslem  $c$ : matice  $R$ ,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

vynásobení 2. řádku číslem  $-2$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -6 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

# Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice  $A$  odpovídá násobení matice  $A$  jistou maticí zleva.

- Vynásobení  $p$ -tého řádku číslem  $c$ : matice  $R$ ,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přičtení  $p$ -tého řádku ke  $q$ -tému: matice  $S$ ,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

# Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice  $A$  odpovídá násobení matice  $A$  jistou maticí zleva.

- Vynásobení  $p$ -tého řádku číslem  $c$ : matice  $R$ ,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přičtení  $p$ -tého řádku ke  $q$ -tému: matice  $S$ ,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

přičtení 2. řádku ke 3.: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice  $A$  odpovídá násobení matice  $A$  jistou maticí zleva.

- Vynásobení  $p$ -tého řádku číslem  $c$ : matice  $R$ ,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přičtení  $p$ -tého řádku ke  $q$ -tému: matice  $S$ ,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přehození  $p$ -tého a  $q$ -tého řádku: matice  $T$ ,

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & p \neq i = j \neq q, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q, \text{ nebo } i = q \text{ a } j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

# Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice  $A$  odpovídá násobení matice  $A$  jistou maticí zleva.

- Vynásobení  $p$ -tého řádku číslem  $c$ : matice  $R$ ,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přičtení  $p$ -tého řádku ke  $q$ -tému: matice  $S$ ,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přehození  $p$ -tého a  $q$ -tého řádku: matice  $T$ ,

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & p \neq i = j \neq q, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q, \text{ nebo } i = q \text{ a } j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

přehození 2. a 3. řádku: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

# Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice  $A$  odpovídá násobení matice  $A$  jistou maticí zleva.

- Vynásobení  $p$ -tého řádku číslem  $c$ : matice  $R$ ,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přičtení  $p$ -tého řádku ke  $q$ -tému: matice  $S$ ,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přehození  $p$ -tého a  $q$ -tého řádku: matice  $T$ ,

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & p \neq i = j \neq q, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q, \text{ nebo } i = q \text{ a } j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$



Základní pojmy

---

Řešení soustav rovnic – Gaussova eliminace

---

**Determinanty**

Determinant čtvercové matice řádu 2

Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

Determinant čtvercové matice řádu  $n$

Řešení soustav rovnic – Cramerovo pravidlo

---

Regulární matice

---

Aplikace – maticové populační modely

---

# Determinanty

# Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

# Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

# Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

$$y = \frac{f - cx}{d}$$

## Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

$$y = \frac{f - cx}{d}$$

$$ax + \frac{b}{d}(f - cx) = e$$

$$(ad - bc)x = ed - bf$$

## Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

$$y = \frac{f - cx}{d}$$

$$ax + \frac{b}{d}(f - cx) = e$$

$$(ad - bc)x = ed - bf \quad \text{předpokládejme, že } ad - bc \neq 0$$

# Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

$$y = \frac{f - cx}{d}$$

$$ax + \frac{b}{d}(f - cx) = e$$

$$(ad - bc)x = ed - bf \quad \text{předpokládejme, že } ad - bc \neq 0$$

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

## Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

$$y = \frac{f - cx}{d}$$

$$ax + \frac{b}{d}(f - cx) = e$$

$$(ad - bc)x = ed - bf \quad \text{předpokládejme, že } ad - bc \neq 0$$

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

$$y = \frac{1}{d} \left( f - \frac{c(ed - bf)}{ad - bc} \right) = \frac{1}{d} \frac{adf - ced}{ad - bc} = \frac{af - ce}{ad - bc}$$



# Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{array}{l} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{array} \quad \text{je-li } ad - bc \neq 0 \quad \text{pak} \quad x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

## Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{array}{l} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{array} \quad \text{je-li } ad - bc \neq 0 \quad \text{pak} \quad x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Matice soustavy  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , vektor pravých stran  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

## Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{array}{l} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{array} \quad \text{je-li } ad - bc \neq 0 \quad \text{pak} \quad x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Matice soustavy  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , vektor pravých stran  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

*Determinant matice A:*

$$\det A = |A| = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

## Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{array}{l} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{array} \quad \text{je-li } ad - bc \neq 0 \quad \text{pak} \quad x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Matice soustavy  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , vektor pravých stran  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

*Determinant matice A:*

$$\det A = |A| = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Pokud  $\det A \neq 0$ , pak jediné řešení dané soustavy rovnic je:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

# Determinant čtvercové matice řádu 2

Příklad:

$$2x + 3y = 7$$

$$x + 2y = 4$$

# Determinant čtvercové matice řádu 2

Příklad:

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0,$$

## Determinant čtvercové matice řádu 2

Příklad:

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0,$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = \mathbf{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{1} = 2 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = \mathbf{1}.$$

# Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$ax + by + cz = k$$

$$dx + ey + fz = l$$

$$gx + hy + jz = m$$



# Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$ax + by + cz = k$$

$$dx + ey + fz = l$$

$$gx + hy + jz = m$$

$$z = \frac{1}{j}(m - gx - hy)$$

## Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$ax + by + cz = k$$

$$dx + ey + fz = l$$

$$gx + hy + jz = m$$

$$z = \frac{1}{j}(m - gx - hy)$$

$$ax + by + \frac{c}{j}(m - gx - hy) = k$$

$$dx + ey + \frac{f}{j}(m - gx - hy) = l$$

## Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$ax + by + cz = k$$

$$dx + ey + fz = l$$

$$gx + hy + jz = m$$

$$z = \frac{1}{j}(m - gx - hy)$$

$$ax + by + \frac{c}{j}(m - gx - hy) = k$$

$$dx + ey + \frac{f}{j}(m - gx - hy) = l$$

$$(aj - cg)x + (bj - ch)y = kj - cm$$

$$(dj - fg)x + (ej - fh)y = lj - fm$$

## Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$ax + by + cz = k$$

$$dx + ey + fz = l$$

$$gx + hy + jz = m$$

$$z = \frac{1}{j}(m - gx - hy)$$

$$(aj - cg)x + (bj - ch)y = kj - cm$$

$$(dj - fg)x + (ej - fh)y = lj - fm$$

# Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$ax + by + cz = k$$

$$dx + ey + fz = l$$

$$gx + hy + jz = m$$

$$z = \frac{1}{j}(m - gx - hy)$$

$$(aj - cg)x + (bj - ch)y = kj - cm$$

$$(dj - fg)x + (ej - fh)y = lj - fm$$

O jednoznačné řešitelnosti dané soustavy rovnic tedy rozhoduje

$$\det \begin{pmatrix} aj - cg & bj - ch \\ dj - fg & ej - fh \end{pmatrix} =$$

$$= aej^2 - ajfh - cgej + cgfh - (bj^2d - bjfg - chdj + chfg) =$$

$$= j(aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj)$$

## Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

## Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

## Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$



## Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

## Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

## Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

## Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

## Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

# Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

Sarrusovo pravidlo:

$$\begin{array}{ccc} \oplus & \oplus & \oplus \\ \searrow & \searrow & \searrow \\ \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{array} \right| & \begin{array}{cc} a & b \\ d & e \\ g & h \end{array} & = aej + bfg + cdh - gec - hfa - jdb \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ \ominus & \ominus & \ominus \end{array}$$

# Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

Sarrusovo pravidlo:

$$\begin{array}{ccc} \oplus & \oplus & \oplus \\ \searrow & \searrow & \searrow \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{vmatrix} & \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ \ominus & \ominus & \ominus \end{array} = aej + bfg + cdh - gec - hfa - jdb$$

Laplaceův rozvoj determinantu podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj = \\ = a(ej - fh) - b(dj - fg) + c(dh - eg)$$

# Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

Sarrusovo pravidlo:

$$\begin{array}{ccc} \oplus & \oplus & \oplus \\ \searrow & \searrow & \searrow \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{vmatrix} & \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ \ominus & \ominus & \ominus \end{array} = aej + bfg + cdh - gec - hfa - jdb$$

Laplaceův rozvoj determinantu podle 1. řádku:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} &= aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj = \\ &= a(ej - fh) - b(dj - fg) + c(dh - eg) = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & j \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & j \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{aligned}$$



# Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned}ax + by + cz &= k \\dx + ey + fz &= l \\gx + hy + jz &= m\end{aligned}$$

Pokud  $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} \neq 0$  pak má daná soustava rovnic jednoznačné řešení;

složky řešení jsou dány výrazy

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} k & b & c \\ l & e & f \\ m & h & j \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & k & c \\ d & l & f \\ g & m & j \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & b & k \\ d & e & l \\ g & h & m \end{vmatrix}$$

# Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$2x + 3y + z = 1$$

$$x + 2y + z = -1$$

$$x + y - z = 4$$

# Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned}2x + 3y + z &= 1 \\x + 2y + z &= -1 \\x + y - z &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 1 - (2 + 2 - 3) = -1 \neq 0$$

# Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned}2x + 3y + z &= 1 \\x + 2y + z &= -1 \\x + y - z &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 1 - (2 + 2 - 3) = -1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 12 - 1 - (8 + 1 + 3) = -3, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 4 - (-1 + 8 - 1) = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 3 + 1 - (2 - 2 + 12) = 2.$$

# Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned}2x + 3y + z &= 1 \\x + 2y + z &= -1 \\x + y - z &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 1 - (2 + 2 - 3) = -1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 12 - 1 - (8 + 1 + 3) = -3, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 4 - (-1 + 8 - 1) = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 3 + 1 - (2 - 2 + 12) = 2.$$

$$x = 3, y = -1, z = -2$$

# Determinant čtvercové matice řádu $n$

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

# Determinant čtvercové matice řádu $n$

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

# Determinant čtvercové matice řádu $n$

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



# Determinant čtvercové matice řádu $n$

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \dots$$

# Determinant čtvercové matice řádu $n$

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

# Determinant čtvercové matice řádu $n$

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

# Determinant čtvercové matice řádu $n$

Determinant čtvercové matice  $A$  řádu 1 je číslo  $|A| = a_{11}$

Determinant čtvercové matice  $A$  řádu  $n$  je číslo

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| + \cdots + (-1)^{n+1}|A_{1n}|$$

kde  $A_{1j}$  označuje matici, která vznikne z matice  $A$  vynecháním prvního řádku a  $j$  tého sloupce.

# Determinant čtvercové matice řádu $n$

Determinant čtvercové matice  $A$  řádu 1 je číslo  $|A| = a_{11}$

Determinant čtvercové matice  $A$  řádu  $n$  je číslo

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| + \cdots + (-1)^{n+1}|A_{1n}|$$

kde  $A_{1j}$  označuje matici, která vznikne z matice  $A$  vynecháním prvního řádku a  $j$  tého sloupce.

Obecněji: Determinant čtvercové matice  $A$  řádu  $n$  je číslo

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

kde  $A_{ij}$  označuje matici, která vznikne z matice  $A$  vynecháním  $i$ -tého řádku a  $j$  tého sloupce.

# Determinant čtvercové matice řádu $n$

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

# Determinant čtvercové matice řádu $n$

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

# Determinant čtvercové matice řádu $n$

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$



# Determinant čtvercové matice řádu $n$

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

# Determinant čtvercové matice řádu $n$

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + 6 + 6 - (3 - 6 - 2) - 2[-2 + 2 + 3 - (1 + 12 - 1)] + 3[-4 - 2 + 3 - (2 + 12 + 1)] = -18$$

Základní pojmy

---

Řešení soustav rovnic – Gaussova eliminace

---

Determinanty

---

**Řešení soustav rovnic – Cramerovo pravidlo**

Soustava  $n$  rovnic o  $n$  neznámých

Regulární matice

---

Aplikace – maticové populační modely

---

# Řešení soustav rovnic – Cramerovo pravidlo

# Soustava $n$ rovnic o $n$ neznámých

$$Ax = b$$

Pokud  $|A| \neq 0$ , pak soustava rovnic má jediné řešení, jehož složky jsou dány rovnostmi

$$x_i = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

# Soustava $n$ rovnic o $n$ neznámých

Příklad: Najděte čtvrtou složku řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5\end{aligned}$$

# Soustava $n$ rovnic o $n$ neznámých

Příklad: Najděte čtvrtou složku řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

# Soustava $n$ rovnic o $n$ neznámých

Příklad: Najděte čtvrtou složku řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= -5 - 3 + 24 - (12 + 3 + 10) - 2(10 - 1 + 12 - (4 - 6 + 5)) + 3(20 + 1 + 12 - (8 - 6 - 5)) - \\ &\quad - 5(12 - 1 + 3 - (2 + 6 - 3)) = 18 \end{aligned}$$

# Soustava $n$ rovnic o $n$ neznámých

Příklad: Najděte čtvrtou složku řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 - 3 + 24 - (12 + 3 + 10) - 2(10 - 1 + 12 - (4 - 6 + 5)) + 3(20 + 1 + 12 - (8 - 6 - 5)) - 5(12 - 1 + 3 - (2 + 6 - 3)) = 18$$

$$x_4 = \frac{18}{-18} = -1$$



Základní pojmy

---

Řešení soustav rovnic – Gaussova eliminace

---

Determinanty

---

Řešení soustav rovnic – Cramerovo pravidlo

---

**Regulární matice**

Inverzní matice

Definice a vlastnosti

Aplikace – maticové populační modely

---

# Regulární matice

# Inverzní matice

*Inverzní matice*  $A^{-1}$  k čtvercové matici  $A$  řádu  $n$ :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

# Inverzní matice

*Inverzní matice*  $A^{-1}$  k čtvercové matici  $A$  řádu  $n$ :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Užití:  $Ax = b$

# Inverzní matice

*Inverzní matice*  $A^{-1}$  k čtvercové matici  $A$  řádu  $n$ :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Užití:  $Ax = b$  | násobení maticí  $A^{-1}$  zleva

# Inverzní matice

*Inverzní matice*  $A^{-1}$  k čtvercové matici  $A$  řádu  $n$ :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Užití:  $Ax = b$  | násobení maticí  $A^{-1}$  zleva  
 $x = A^{-1}b$

# Inverzní matice

*Inverzní matice*  $A^{-1}$  k čtvercové matici  $A$  řádu  $n$ :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Výpočet:  $X = A^{-1}$

# Inverzní matice

*Inverzní matice*  $A^{-1}$  k čtvercové matici  $A$  řádu  $n$ :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Výpočet:  $X = A^{-1}$  | násobení maticí  $A$  zleva

# Inverzní matice

*Inverzní matice*  $A^{-1}$  k čtvercové matici  $A$  řádu  $n$ :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Výpočet:

$$\begin{array}{l} X = A^{-1} \mid \text{násobení maticí } A \text{ zleva} \\ AX = E \end{array}$$



# Inverzní matice

Inverzní matice  $A^{-1}$  k čtvercové matici  $A$  řádu  $n$ :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Výpočet:  $X = A^{-1}$   
 $AX = E$

$j$ -tý sloupec matic:

$$A \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{j-1,j} \\ x_{jj} \\ x_{j+1,j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Inverzní matice

Inverzní matice  $A^{-1}$  k čtvercové matici  $A$  řádu  $n$ :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Výpočet: 
$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \\ AX &= E \end{aligned}$$

$j$ -tý sloupec matic:

$$A \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{j-1,j} \\ x_{jj} \\ x_{j+1,j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

To je soustava  $n$  rovnic o  $n$  neznámých. Je jednoznačně řešitelná, pokud  $h(A) = n$ .

# Inverzní matice

Inverzní matice  $A^{-1}$  k čtvercové matici  $A$  řádu  $n$ :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Výpočet: 
$$X = A^{-1}$$
$$AX = E$$

$j$ -tý sloupec matic:

$$A \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{j-1,j} \\ x_{jj} \\ x_{j+1,j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

To je soustava  $n$  rovnic o  $n$  neznámých. Je jednoznačně řešitelná, pokud  $h(A) = n$ . Inverzní matici najdeme řešením  $n$  soustav  $n$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých.

# Inverzní matice

Příklady:

# Inverzní matice

Příklady:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

# Inverzní matice

Příklady:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & | & 1 & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 0 & 1 \\ 0 & -5 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 5 & | & 0 & 5 \\ 0 & -5 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 10 & 0 & | & 1 & 3 \\ 0 & 5 & | & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0,1 & 0,3 \\ 0 & 1 & | & -0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

# Inverzní matice

Příklady:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & | & 1 & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 0 & 1 \\ 0 & -5 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 5 & | & 0 & 5 \\ 0 & -5 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 10 & 0 & | & 1 & 3 \\ 0 & 5 & | & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0,1 & 0,3 \\ 0 & 1 & | & -0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ -0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

# Inverzní matice

Příklady:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & | & 1 & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 0 & 1 \\ 0 & -5 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 5 & | & 0 & 5 \\ 0 & -5 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 10 & 0 & | & 1 & 3 \\ 0 & 5 & | & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0,1 & 0,3 \\ 0 & 1 & | & -0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ -0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Obecně platí:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$



# Inverzní matice

Příklady:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \\ 6 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$

# Inverzní matice

Příklady:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \\ 6 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} -3 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & -3 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & -3 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -33 & 15 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & -33 & 0 & -9 & -6 & 0 \\ 0 & 105 & 0 & 0 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -33 & 15 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -11 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 0 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -33 & 15 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -11 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -33 & 15 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & -21 & -47 & 22 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -33 & 15 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -21 & -47 & 22 \\ 0 & -3 & 2 \\ -14 & -33 & 15 \end{pmatrix}$$

# Definice a vlastnosti

Čtvercová matice  $A$  řádu  $n$  je *regulární*, pokud  $h(A) = n$ .

# Definice a vlastnosti

Čtvercová matice  $A$  řádu  $n$  je *regulární*, pokud  $h(A) = n$ .  
Ekvivalentně: pokud  $|A| \neq 0$ .

# Definice a vlastnosti

Čtvercová matice  $A$  řádu  $n$  je *regulární*, pokud  $h(A) = n$ .  
Ekvivalentně: pokud  $|A| \neq 0$ .

Je-li matice  $A$  regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

# Definice a vlastnosti

Čtvercová matice  $A$  řádu  $n$  je *regulární*, pokud  $h(A) = n$ .  
Ekvivalentně: pokud  $|A| \neq 0$ .

Je-li matice  $A$  regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

Vlastnosti násobení regulárních matic:

# Definice a vlastnosti

Čtvercová matice  $A$  řádu  $n$  je *regulární*, pokud  $h(A) = n$ .  
Ekvivalentně: pokud  $|A| \neq 0$ .

Je-li matice  $A$  regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

Vlastnosti násobení regulárních matic:

$$(AB)C = A(BC) \quad \textit{asociativita}$$

# Definice a vlastnosti

Čtvercová matice  $A$  řádu  $n$  je *regulární*, pokud  $h(A) = n$ .  
Ekvivalentně: pokud  $|A| \neq 0$ .

Je-li matice  $A$  regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

Vlastnosti násobení regulárních matic:

$$(AB)C = A(BC) \quad \textit{asociativita}$$

$$AE = EA = A \quad \textit{existuje neutrální prvek}$$



# Definice a vlastnosti

Čtvercová matice  $A$  řádu  $n$  je *regulární*, pokud  $h(A) = n$ .

Ekvivalentně: pokud  $|A| \neq 0$ .

Je-li matice  $A$  regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

Vlastnosti násobení regulárních matic:

$$(AB)C = A(BC) \quad \textit{asociativita}$$

$$AE = EA = A \quad \textit{existuje neutrální prvek}$$

$$AA^{-1} = E \quad \textit{ke každé regulární matici existuje inverzní prvek}$$

# Definice a vlastnosti

Čtvercová matice  $A$  řádu  $n$  je *regulární*, pokud  $h(A) = n$ .  
Ekvivalentně: pokud  $|A| \neq 0$ .

Je-li matice  $A$  regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

Vlastnosti násobení regulárních matic:

$$\begin{array}{ll} (AB)C = A(BC) & \textit{asociativita} \\ AE = EA = A & \textit{existuje neutrální prvek} \\ AA^{-1} = E & \textit{ke každé regulární matici existuje inverzní prvek} \end{array}$$

Regulární matice spolu s operací násobení tvoří grupu.

Základní pojmy

---

Řešení soustav rovnic – Gaussova eliminace

---

Determinanty

---

Řešení soustav rovnic – Cramerovo pravidlo

---

Regulární matice

---

**Aplikace – maticové populační modely**

Leslieho populace

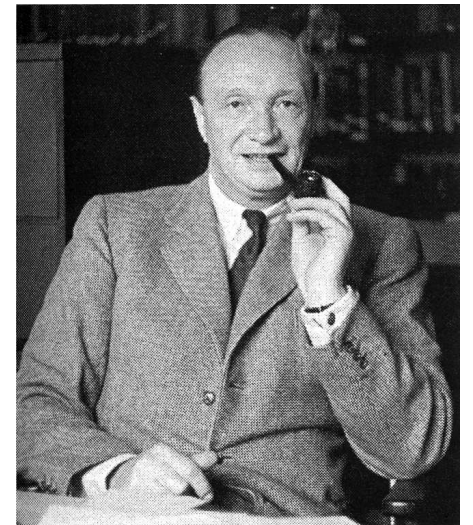
Populace strukturovaná podle stádií

Obecná strukturovaná populace

# Aplikace – maticové populační modely

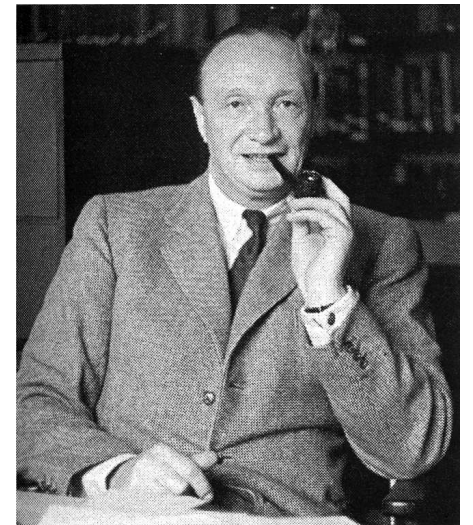
# Leslieho populace

Patrick Holt Leslie (1900–1972)



# Leslieho populace

$x_i(t)$  – počet samic věku  $i$  měsíců; přesněji věku z intervalu  $(i - 1, i)$  měsíců  
 $p_i$  – podíl samic věku  $i$ , které přežijí do dalšího měsíce

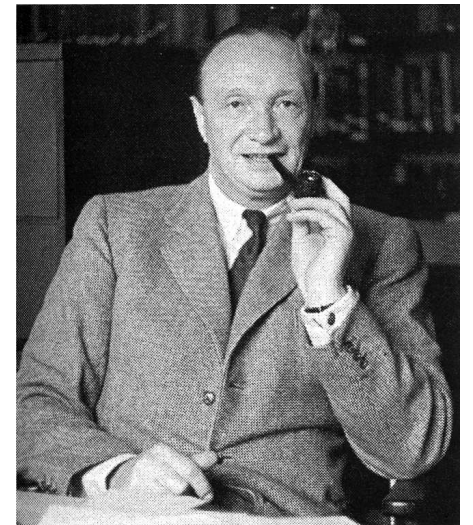


# Leslieho populace

$x_i(t)$  – počet samic věku  $i$  měsíců; přesněji věku z intervalu  $(i - 1, i)$  měsíců  
 $p_i$  – podíl samic věku  $i$ , které přežijí do dalšího měsíce

$$x_{i+1}(t + 1) = p_i x_i(t),$$

$$i = 1, 2, \dots, k - 1$$



# Leslieho populace

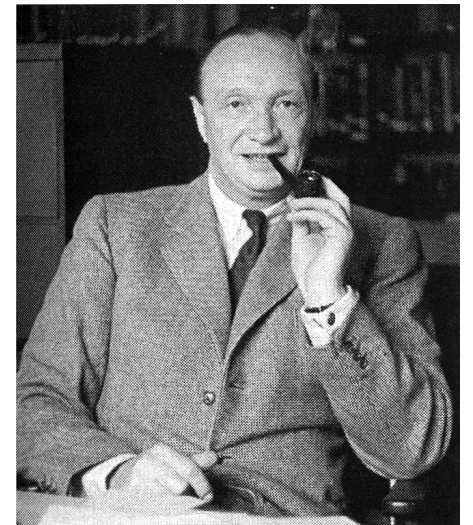
$x_i(t)$  – počet samic věku  $i$  měsíců; přesněji věku z intervalu  $(i - 1, i)$  měsíců

$p_i$  – podíl samic věku  $i$ , které přežijí do dalšího měsíce

$f_i$  – očekávaný počet dcer, které během měsíce porodí samice věku  $i$  let

$$x_{i+1}(t + 1) = p_i x_i(t),$$

$$i = 1, 2, \dots, k - 1$$



# Leslieho populace

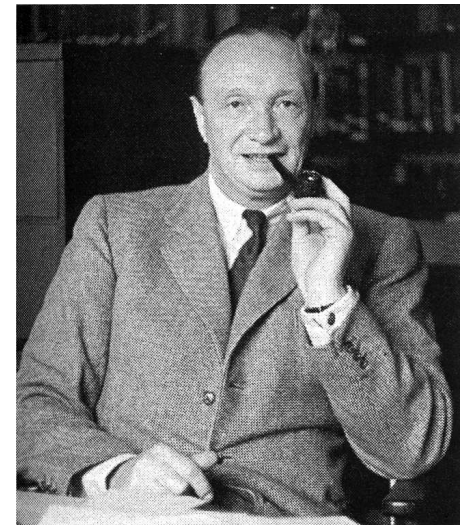
$x_i(t)$  – počet samic věku  $i$  měsíců; přesněji věku z intervalu  $(i - 1, i)$  měsíců

$p_i$  – podíl samic věku  $i$ , které přežijí do dalšího měsíce

$f_i$  – očekávaný počet dcer, které během měsíce porodí samice věku  $i$  let

$$x_1(t + 1) = f_1x_1(t) + f_2x_2(t) + \cdots + f_kx_k(t)$$

$$x_{i+1}(t + 1) = p_ix_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, k - 1$$





# Leslieho populace

$x_i(t)$  – počet samic věku  $i$  měsíců; přesněji věku z intervalu  $(i - 1, i)$  měsíců

$p_i$  – podíl samic věku  $i$ , které přežijí do dalšího měsíce

$f_i$  – očekávaný počet dcer, které během měsíce porodí samice věku  $i$  let

$$x_1(t + 1) = f_1 x_1(t) + f_2 x_2(t) + \dots + f_k x_k(t)$$

$$x_{i+1}(t + 1) = p_i x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, k - 1$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t + 1) \\ x_2(t + 1) \\ x_3(t + 1) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t + 1) \\ x_k(t + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_{k-1} & f_k \\ p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t) \\ x_k(t) \end{pmatrix}$$

# Leslieho populace

$x_i(t)$  – počet samic věku  $i$  měsíců; přesněji věku z intervalu  $(i - 1, i)$  měsíců

$p_i$  – podíl samic věku  $i$ , které přežijí do dalšího měsíce

$f_i$  – očekávaný počet dcer, které během měsíce porodí samice věku  $i$  let

$$x_1(t + 1) = f_1 x_1(t) + f_2 x_2(t) + \dots + f_k x_k(t)$$

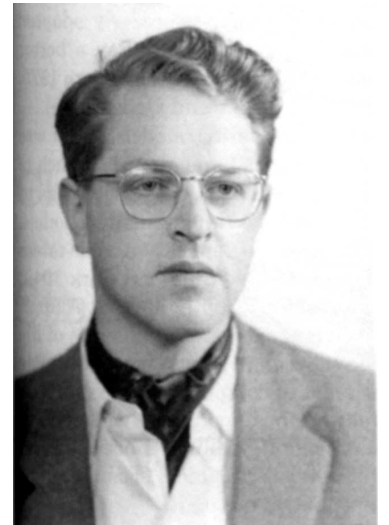
$$x_{i+1}(t + 1) = p_i x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, k - 1$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t + 1) \\ x_2(t + 1) \\ x_3(t + 1) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t + 1) \\ x_k(t + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_{k-1} & f_k \\ p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t) \\ x_k(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

# Populace strukturovaná podle stádií

Leonard Lefkowitz (1929–2010)



# Populace strukturovaná podle stádií

Obojživelníci: vajíčko – pulec – dospělý jedinec



# Populace strukturovaná podle stádií

Obojživelníci: vajíčko – pulec – dospělý jedinec

Hmyz: vajíčko – larva – kukla – imago



# Populace strukturovaná podle stádií

$k$  – počet stádií

$x_i(t)$  – počet jedinců stadia  $i$  v čase  $t$  ( $i = 1$  – „novorozenci“)

$q_i$  – podíl jedinců stadia  $i$ , kteří přežijí období a nepromění se;  $0 < q_i < 1$

$p_i$  – podíl jedinců stadia  $i$ , kteří se během období přemění na stadium  $i + 1$ ;

$$0 < p_i \leq 1,$$

$$p_i + q_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$f_i$  – očekávaný počet „novorozenců“, které vyprodukuje jedinec stadia  $i > 1$ ;  $f_i \geq 0$

# Populace strukturovaná podle stádií

$k$  – počet stádií

$x_i(t)$  – počet jedinců stadia  $i$  v čase  $t$  ( $i = 1$  – „novorozenci“)

$q_i$  – podíl jedinců stadia  $i$ , kteří přežijí období a nepromění se;  $0 < q_i < 1$

$p_i$  – podíl jedinců stadia  $i$ , kteří se během období přemění na stadium  $i + 1$ ;

$$0 < p_i \leq 1,$$

$$p_i + q_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$f_i$  – očekávaný počet „novorozenců“, které vyprodukuje jedinec stadia  $i > 1$ ;  $f_i \geq 0$

$$x_1(t + 1) = \sum_{j=2}^k f_j x_j(t), \quad x_i(t + 1) = q_i x_i(t) + p_i x_{i-1}(t), \quad i = 2, 3, \dots, k$$

# Populace strukturovaná podle stádií

$k$  – počet stádií

$x_i(t)$  – počet jedinců stadia  $i$  v čase  $t$  ( $i = 1$  – „novorozenci“)

$q_i$  – podíl jedinců stadia  $i$ , kteří přežijí období a nepromění se;  $0 < q_i < 1$

$p_i$  – podíl jedinců stadia  $i$ , kteří se během období přemění na stadium  $i + 1$ ;

$$0 < p_i \leq 1,$$

$$p_i + q_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$f_i$  – očekávaný počet „novorozenců“, které vyprodukuje jedinec stadia  $i > 1$ ;  $f_i \geq 0$

$$x_1(t+1) = \sum_{j=2}^k f_j x_j(t), \quad x_i(t+1) = q_i x_i(t) + p_i x_{i-1}(t), \quad i = 2, 3, \dots, k$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ \vdots \\ x_k(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & f_2 & \dots & f_{k-1} & f_k \\ p_1 & q_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{k-1} & q_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}$$



# Populace strukturovaná podle stádií

$k$  – počet stádií

$x_i(t)$  – počet jedinců stadia  $i$  v čase  $t$  ( $i = 1$  – „novorozenci“)

$q_i$  – podíl jedinců stadia  $i$ , kteří přežijí období a nepromění se;  $0 < q_i < 1$

$p_i$  – podíl jedinců stadia  $i$ , kteří se během období přemění na stadium  $i + 1$ ;

$$0 < p_i \leq 1,$$

$$p_i + q_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$f_i$  – očekávaný počet „novorozenců“, které vyprodukuje jedinec stadia  $i > 1$ ;  $f_i \geq 0$

$$x_1(t+1) = \sum_{j=2}^k f_j x_j(t), \quad x_i(t+1) = q_i x_i(t) + p_i x_{i-1}(t), \quad i = 2, 3, \dots, k$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ \vdots \\ x_k(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & f_2 & \dots & f_{k-1} & f_k \\ p_1 & q_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{k-1} & q_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

# Obecná strukturovaná populace

Příklad: Populace *Dipsacus sylvestris*



# Obecná strukturovaná populace

**Příklad:** Populace *Dipsacus sylvestris*

Časová jednotka: rok

Třídění:	třída	popis
	1,2	semena
	3,4,5	růžice
	6	kvetoucí rostlina



# Obecná strukturovaná populace

**Příklad:** Populace *Dipsacus sylvestris*

Časová jednotka: rok

Třídění:	třída	popis
	1,2	semena
	3,4,5	dormantní 1.rok, dormantní 2. rok malá, střední, velká
	6	kvetoucí rostlina

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_4(t+1) \\ x_5(t+1) \\ x_6(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 322,38 \\ 0,966 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,013 & 0,010 & 0,125 & 0 & 0 & 3,448 \\ 0,007 & 0 & 0,125 & 0,238 & 0 & 30,170 \\ 0,001 & 0 & 0,036 & 0,245 & 0,167 & 0,863 \\ 0 & 0 & 0 & 0,023 & 0,750 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix}$$

