Počet pravděpodobnosti

M1030 Matematika pro biology

23. 10. 2020

Základní pojmy

Náhodný pokus

Jakákoliv akce, jejíž výsledek není znám před jejím provedením

Náhodný pokus

Jakákoliv akce, jejíž výsledek není znám před jejím provedením

Příklady:

- Hod mincí – avers, revers

Náhodný pokus

Jakákoliv akce, jejíž výsledek není znám před jejím provedením

Příklady:

- Hod mincí – avers, revers, hrana, mince se ztratí

Náhodný pokus

Jakákoliv akce, jejíž výsledek není znám před jejím provedením

Příklady:

- Hod mincí – avers, revers, hrana, mince se ztratí
- Zplození dítěte – ♀,♂

Náhodný pokus

Jakákoliv akce, jejíž výsledek není znám před jejím provedením

Příklady:

- Hod mincí – avers, revers, hrana, mince se ztratí
- Zplození dítěte – ♀,♂
- Hod kostkou – ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅

Náhodný pokus

Jakákoliv akce, jejíž výsledek není znám před jejím provedením

Příklady:

- Hod mincí – avers, revers, hrana, mince se ztratí
- Zplození dítěte – ♀,♂
- Hod kostkou – ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅
- Tah loterie – vylosované číslo

Náhodný pokus

Jakákoliv akce, jejíž výsledek není znám před jejím provedením

Příklady:

- Hod mincí – avers, revers, hrana, mince se ztratí
- Zplození dítěte – ♀,♂
- Hod kostkou – ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅
- Tah loterie – vylosované číslo
- Zjišťování teploty varu vody – nějaká hodnota mezi 70°C a 105°C

Náhodný pokus

Jakákoliv akce, jejíž výsledek není znám před jejím provedením

Příklady:

- Hod mincí – avers, revers, hrana, mince se ztratí
- Zplození dítěte – ♀,♂
- Hod kostkou – ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅
- Tah loterie – vylosované číslo
- Zjišťování teploty varu vody – nějaká hodnota mezi 70°C a 105°C
- Střelba do terče – bod na terči

Prostor výsledků

Základní prostor možných výsledků – všechny uvažované výsledky pokusu

Prostor výsledků

Základní prostor možných výsledků – všechny uvažované výsledky pokusu
neprázdná množina Ω

Prostor výsledků

Základní prostor možných výsledků – všechny uvažované výsledky pokusu
neprázdná množina Ω

Příklady:

- Hod mincí: $\{$avers, revers$\}$

Prostor výsledků

Základní prostor možných výsledků – všechny uvažované výsledky pokusu
neprázdná množina Ω

Příklady:

- Hod mincí: $\{$avers, revers$\}$
- Zplození dítěte: $\{$♀,♂$\}$

Prostor výsledků

Základní prostor možných výsledků – všechny uvažované výsledky pokusu
neprázdná množina Ω

Příklady:

- Hod mincí: {avers, revers}
- Zplození dítěte: {♀,♂}
- Hod kostkou: {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}

Prostor výsledků

Základní prostor možných výsledků – všechny uvažované výsledky pokusu
neprázdná množina Ω

Příklady:

- Hod mincí: {avers, revers}
- Zplození dítěte: {♀,♂}
- Hod kostkou: {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}
- Zjišťování teploty varu vody: $(70, 105)$

Prostor výsledků

Základní prostor možných výsledků – všechny uvažované výsledky pokusu
neprázdná množina Ω

Příklady:

- Hod mincí: {avers, revers}
- Zplození dítěte: {♀,♂}
- Hod kostkou: {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}
- Zjišťování teploty varu vody: $(70, 105)$
- Střelba do terče: $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

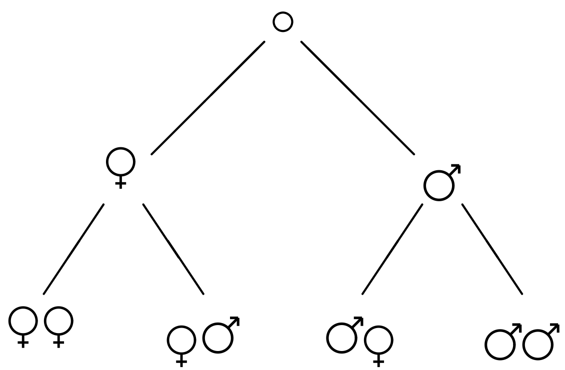
Strom průběhu pokusu

Strom průběhu a výsledků náhodného pokusu

Strom průběhu pokusu

Strom průběhu a výsledků náhodného pokusu

Příklad: Zplození dvou dětí



kořen

větve

zplození prvního dítěte

zplození druhého dítěte

Náhodný jev

Nějaká rozpoznatelná část (podmnožina) prostoru výsledků Ω

Náhodný jev

Nějaká rozpoznatelná část (podmnožina) prostoru výsledků Ω, $A \subseteq \Omega$

Náhodný jev

Nějaká rozpoznatelná část (podmnožina) prostoru výsledků Ω, $A \subseteq \Omega$

Příklady:

Náhodný jev

Nějaká rozpoznatelná část (podmnožina) prostoru výsledků Ω, $A \subseteq \Omega$

Příklady:

1. Pokus – střelba do terče, $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
Jev – zásah do černého kolečka (o poloměru r) uprostřed,

$$A = \left\{(x, y) : (x - \tfrac{1}{2})^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 < r^2\right\}$$

Náhodný jev

Nějaká rozpoznatelná část (podmnožina) prostoru výsledků Ω, $A \subseteq \Omega$

Příklady:

2. Pokus – hod kostkou, $\Omega = \{\epsdice{1}, \epsdice{2}, \epsdice{3}, \epsdice{4}, \epsdice{5}, \epsdice{6}\}$

Jev –	padne pětka	$A = \{\epsdice{5}\}$
	padne sudý počet ok	$B = \{\epsdice{2}, \epsdice{4}, \epsdice{6}\}$
	padne lichý počet ok	$C = \{\epsdice{1}, \epsdice{3}, \epsdice{5}\}$
	padnou nejvýše dvě oka	$D = \{\epsdice{1}, \epsdice{2}\}$
	padne více než šest ok	$E = \emptyset$

Náhodný jev

Nějaká rozpoznatelná část (podmnožina) prostoru výsledků Ω, $A \subseteq \Omega$

Příklady:

2. Pokus – hod kostkou, $\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$

Jev –	padne pětka	$A = \{$⚄$\}$
	padne sudý počet ok	$B = \{$⚁, ⚃, ⚅$\}$
	padne lichý počet ok	$C = \{$⚀, ⚂, ⚄$\}$
	padnou nejvýše dvě oka	$D = \{$⚀, ⚁$\}$
	padne více než šest ok	$E = \emptyset$

Jev *nemožný* (prázdný) – nemůže nastat, $E = \emptyset$
Jev *jistý* – určitě nastane, Ω
Jevy *slučitelné* – mají neprázdný průnik, $A \cap C = \{$⚄$\}$, $B \cap D = \{$⚁$\}$
Jevy *neslučitelné* – mají prázdný průnik, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap D = \emptyset$
Jevy *opačné*, *komplementární* – neslučitelné, jejich sjednocením je jev jistý Ω,

$$C = \Omega \setminus B,\ B \cup C = \Omega$$

Definice pravděpodobnosti jevu

Empirická pravděpodobnost

Náhodný pokus mnohokrát opakujeme, zaznamenáme počet výskytů jevu

Empirická pravděpodobnost

Náhodný pokus mnohokrát opakujeme, zaznamenáme počet výskytů jevu

n – počet opakování pokusu, $n > 0$
f_A – počet výskytu (absolutní frekvence) jevu A

$$\mathsf{P}(A) = \frac{f_A}{n},$$

tj. relativní frekvence jevu A

Empirická pravděpodobnost

Náhodný pokus mnohokrát opakujeme, zaznamenáme počet výskytů jevu

n – počet opakování pokusu, $n > 0$
f_A – počet výskytu (absolutní frekvence) jevu A

$$\mathsf{P}(A) = \frac{f_A}{n},$$

tj. relativní frekvence jevu A

Příklad: V roce 1970 se v ČSSR narodilo 228 531 dětí, v tom 111 394 děvčat a zbytek chlapců.

Empirická pravděpodobnost

Náhodný pokus mnohokrát opakujeme, zaznamenáme počet výskytů jevu

n – počet opakování pokusu, $n > 0$
f_A – počet výskytu (absolutní frekvence) jevu A

$$\mathsf{P}(A) = \frac{f_A}{n},$$

tj. relativní frekvence jevu A

Příklad: V roce 1970 se v ČSSR narodilo 228 531 dětí, v tom 111 394 děvčat a zbytek chlapců.
Jevy: A – narození děvčete, B – narození chlapce. Jsou komplementární.

$$n = 228\,531, \; f_A = 111\,394, \; f_B = 228\,531 - 111\,394 = 117\,137$$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{111\,394}{228\,531} \doteq 0{,}4874, \quad \mathsf{P}(B) = \frac{117\,137}{228\,531} \doteq 0{,}5126$$

Empirická pravděpodobnost

Náhodný pokus mnohokrát opakujeme, zaznamenáme počet výskytů jevu

n – počet opakování pokusu, $n > 0$
f_A – počet výskytu (absolutní frekvence) jevu A

$$\mathsf{P}(A) = \frac{f_A}{n},$$

tj. relativní frekvence jevu A

Vlastnosti empirické pravděpodobnosti:

$$0 \leq \mathsf{P}(A)$$

$$\mathsf{P}(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathsf{P}(A \cup B) = \frac{f_A + f_B}{n} = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$$

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Příklady:
Jaká je pravděpodobnost, že na kostce padne méně než tři oka?

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Příklady:
Jaká je pravděpodobnost, že na kostce padne méně než tři oka?

$$\Omega = \{\epsdice{1}, \epsdice{2}, \epsdice{3}, \epsdice{4}, \epsdice{5}, \epsdice{6}\}, \quad |\Omega| = 6,$$

$$A = \{\epsdice{1}, \epsdice{2}\}, \quad |A| = 2,$$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{2}{6} \doteq 0{,}333$$

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Příklady:
Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se třemi dětmi je holčička?

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Příklady:
Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se třemi dětmi je holčička?

$$\Omega = \{♀♀♀, ♂♀♀, ♀♂♀, ♀♀♂, ♀♂♂, ♂♀♂, ♂♂♀, ♂♂♂\}, \quad |\Omega| = 8$$

$$A = \{♀♀♀, ♂♀♀, ♀♂♀, ♀♀♂, ♀♂♂, ♂♀♂, ♂♂♀\}, \quad |A| = 7$$

$$P(A) = \frac{7}{8} \doteq 0{,}875$$

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Vlastnosti klasické pravděpodobnosti:

$$0 \leq \mathsf{P}(A)$$

$$\mathsf{P}(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathsf{P}(A \cup B) = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$$

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum_{\omega \in \Omega} w(\omega) > 0$

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum_{\omega \in \Omega} w(\omega) > 0$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\sum_{\omega \in A} w(\omega)}{\sum_{\omega \in \Omega} w(\omega)}$$

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega) > 0$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\sum\limits_{\omega \in A} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega)}$$

Příklady:
Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma nerozlišitelnými mincemi padnou obě na stejnou stranu?

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega) > 0$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\sum\limits_{\omega \in A} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega)}$$

Příklady:
Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma nerozlišitelnými mincemi padnou obě na stejnou stranu?

$$\Omega = \{(\text{avers}, \text{avers}), (\text{avers}, \text{revers}), (\text{revers}, \text{revers})\},$$

$$w(\text{avers}, \text{avers}) = w(\text{revers}, \text{revers}) = 1, \quad w(\text{avers}, \text{revers}) = 2,$$

$$A = \{(\text{avers}, \text{avers}), (\text{revers}, \text{revers})\}$$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1+1}{1+2+1} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega) > 0$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\sum\limits_{\omega \in A} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega)}$$

Příklady:
Uvažujme velkou populaci, u níž sledujeme jeden dialelický gen. Předpokládejme, že dominantní alela je stejně častá jako recesivní. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný jedinec má recesivní fenotyp?

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega) > 0$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\sum\limits_{\omega \in A} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega)}$$

Příklady:
Uvažujme velkou populaci, u níž sledujeme jeden dialelický gen. Předpokládejme, že dominantní alela je stejně častá jako recesivní. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný jedinec má recesivní fenotyp?

$$\Omega = \left\{ \text{AA}, \text{Aa}, \text{aa} \right\}, \qquad w(\text{AA}) = w(\text{aa}) = 1, \quad w(\text{Aa}) = 2, \qquad A = \left\{ \text{aa} \right\},$$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{1}{1+2+1} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega) > 0$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\sum\limits_{\omega \in A} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega)}$$

Vlastnosti zobecněné klasické pravděpodobnosti:

$$0 \leq \mathsf{P}(A)$$

$$\mathsf{P}(\Omega) = \frac{\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega)} = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathsf{P}(A \cup B) = \frac{\sum\limits_{\omega \in A} w(\omega) + \sum\limits_{\omega \in B} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega)} = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$$

Geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.

Geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Příklady:
Jaká je pravděpodobnost, že při střelbě do terče tvaru čtverce o straně 1 m zasáhneme střed, což je kolečko o průměru 1 cm?

Geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Příklady:
Jaká je pravděpodobnost, že při střelbě do terče tvaru čtverce o straně 1 m zasáhneme střed, což je kolečko o průměru 1 cm?

$$\Omega = \{(x,y):\ 0 \le x \le 100,\ 0 \le y \le 100\}, \quad \mu(\Omega) = 100 \cdot 100 = 10\,000,$$

$$A = \left\{(x,y):\ (x-\tfrac{1}{2})^2 + (y-\tfrac{1}{2})^2 < \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right\}, \quad \mu(A) = \pi \cdot 0{,}5^2 \doteq 0{,}7854,$$

$$P(A) = \frac{\pi \cdot 0{,}5^2}{10\,000} \doteq 0{,}000\,078\,54$$

Geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Příklady:
On a Ona se domluví, že se sejdou na určeném místě mezi 13. a 14. hodinou. On po příchodu čeká 40 minut, Ona 15 minut. Jaká je pravděpodobnost, že se nesetkají?

Geometrická pravděpodobnost

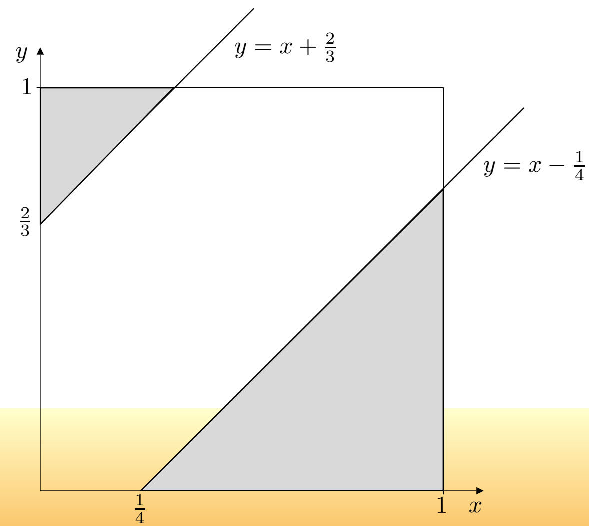
Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu".

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Příklady:
On a Ona se domluví, že se sejdou na určeném místě mezi 13. a 14. hodinou. On po příchodu čeká 40 minut, Ona 15 minut. Jaká je pravděpodobnost, že se nesetkají?

Označení: x . . . čas, kdy přišel On, y . . . čas, kdy přišla Ona

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1\}, \quad \mu(\Omega) = 1,$$
$$A = \left\{(x,y) \in \Omega : y > x + \tfrac{2}{3} \text{ nebo } y < x - \tfrac{1}{4}\right\},$$
$$\mu(A) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = \tfrac{9}{32} + \tfrac{1}{18} \doteq 0{,}3368,$$



$$\mathrm{P}(A) \doteq 0{,}3368$$

Geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Vlastnosti geometrické pravděpodobnosti:

$$0 \leq \mathsf{P}(A)$$

$$\mathsf{P}(\Omega) = \frac{\mu(\Omega)}{\mu(\Omega)} = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathsf{P}(A \cup B) = \frac{\mu(A) + \mu(B)}{\mu(\Omega)} = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$$

Obecná definice pravděpodobnosti

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor
$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$
$$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{A}$$

Obecná definice pravděpodobnosti

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor

$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$\Omega \in \mathcal{A}$

$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{A}$

Pravděpodobnost: P : $\mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.

Obecná definice pravděpodobnosti

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor

$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$

$$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$

$$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{A}$$

Pravděpodobnost: $\mathsf{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.

Přitom platí:

$$P(\Omega) = 1$$

$$A, B \in \mathcal{A},\; A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$$

Obecná definice pravděpodobnosti

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor

$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$

$$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$

$$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{A}$$

Pravděpodobnost: $\mathsf{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.

Přitom platí:

$$P(\Omega) = 1$$

$$A, B \in \mathcal{A},\; A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$$

Pro jevy platí:

Obecná definice pravděpodobnosti

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor

$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$
$$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{A}$$

Pravděpodobnost: $\mathsf{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.

Přitom platí:

$$P(\Omega) = 1$$
$$A, B \in \mathcal{A},\; A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$$

Pro jevy platí:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$

Obecná definice pravděpodobnosti

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor
$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$
$$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{A}$$

Pravděpodobnost: $\mathsf{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.
Přitom platí:

$$P(\Omega) = 1$$
$$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow \ \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$$

Pro jevy platí:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$

  D.: $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{A}$

Obecná definice pravděpodobnosti

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor
$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$\Omega \in \mathcal{A}$

$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{A}$

Pravděpodobnost: $\mathsf{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.
Přitom platí:

$P(\Omega) = 1$

$A, B \in \mathcal{A},\; A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$

Pro jevy platí:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$

  D.: $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{A}$

- $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{A}$

Obecná definice pravděpodobnosti

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor
$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$\Omega \in \mathcal{A}$

$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{A}$

Pravděpodobnost: $\mathsf{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.
Přitom platí:

$P(\Omega) = 1$

$A, B \in \mathcal{A},\; A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$

Pro jevy platí:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$

  D.: $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{A}$

- $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{A}$

  D.: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$\mathsf{P}(\Omega) = 1$

$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$\mathsf{P}(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$\mathsf{P}(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow \ \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$\mathsf{P}(\Omega) = 1$

$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$

  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset)$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$\mathsf{P}(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\; A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$\mathsf{P}(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$\mathsf{P}(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$
  D.: $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}\big(A \cup (\Omega \setminus A)\big) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\Omega \setminus A)$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$\mathsf{P}(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$
  D.: $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}\big(A \cup (\Omega \setminus A)\big) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\Omega \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A) \leq 1$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$\mathsf{P}(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$
  D.: $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}\big(A \cup (\Omega \setminus A)\big) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\Omega \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A) \leq 1$
- $A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$\mathsf{P}(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$
  D.: $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}\big(A \cup (\Omega \setminus A)\big) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\Omega \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A) \leq 1$
- $A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$
  D.: $B = A \cup (B \setminus A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset \ \Rightarrow \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A)$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$\mathsf{P}(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$
  D.: $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}\big(A \cup (\Omega \setminus A)\big) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\Omega \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A) \leq 1$
- $A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$
  D.: $B = A \cup (B \setminus A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset \ \Rightarrow \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$\mathsf{P}(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow \ \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$
  D.: $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}\big(A \cup (\Omega \setminus A)\big) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\Omega \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A) \leq 1$
- $A \subseteq B \ \Rightarrow \ \mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$
  D.: $B = A \cup (B \setminus A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset \ \Rightarrow \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$ – princip inkluze a exkluze

Vlastnosti pravděpodobnosti

$\mathsf{P}(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$
  D.: $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}\big(A \cup (\Omega \setminus A)\big) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\Omega \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A) \leq 1$
- $A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$
  D.: $B = A \cup (B \setminus A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset \ \Rightarrow \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$ – princip inkluze a exkluze
  D.: $A \cup B = \big(A \setminus (A \cap B)\big) \cup (A \cup B) \cup \big(B \setminus (A \cap B)\big)$, jevy vzájemně neslučitelné $\Rightarrow$
  $$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}\big(A \setminus (A \cap B)\big) + \mathsf{P}(A \cup B) + \mathsf{P}\big(B \setminus (A \cap B)\big) =$$
  $$= \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cup B)$$

Vlastnosti pravděpodobnosti

$\mathsf{P}(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow 1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathsf{P}(A)$
  D.: $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}\big(A \cup (\Omega \setminus A)\big) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\Omega \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A) \le 1$
- $A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$
  D.: $B = A \cup (B \setminus A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset \ \Rightarrow \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A)$
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$ – princip inkluze a exkluze
  D.: $A \cup B = \big(A \setminus (A \cap B)\big) \cup (A \cup B) \cup \big(B \setminus (A \cap B)\big)$, jevy vzájemně neslučitelné $\Rightarrow$
  $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}\big(A \setminus (A \cap B)\big) + \mathsf{P}(A \cup B) + \mathsf{P}\big(B \setminus (A \cap B)\big) =$
  $= \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cup B)$
- $\mathsf{P}(A \cup B \cup C) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) - \mathsf{P}(A \cap B) - \mathsf{P}(A \cap C) - \mathsf{P}(B \cap C) + \mathsf{P}(A \cap B \cap C)$

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Výběr je uspořádaný: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{v(90,10)}{v(100,10)} = \dfrac{90!}{80!}\dfrac{90!}{100!}$

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Výběr je uspořádaný: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{v(90,10)}{v(100,10)} = \dfrac{90!}{80!}\dfrac{90!}{100!}$

Nezáleží na tom, zda výběr chápeme jako uspořádaný nebo neuspořádaný.

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Výběr je uspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{v(90,10)}{v(100,10)} = \dfrac{90!}{80!}\dfrac{90!}{100!}$

Nezáleží na tom, zda výběr chápeme jako uspořádaný nebo neuspořádaný.

b) budou nejvýše dva zmetky?

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Výběr je uspořádaný: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{v(90,10)}{v(100,10)} = \dfrac{90!}{80!}\dfrac{90!}{100!}$

Nezáleží na tom, zda výběr chápeme jako uspořádaný nebo neuspořádaný.

b) budou nejvýše dva zmetky?

Jev B_i – ve výběru je právě i zmetků, $i = 0, 1, 2$.

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Výběr je uspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{v(90,10)}{v(100,10)} = \dfrac{90!}{80!}\dfrac{90!}{100!}$

Nezáleží na tom, zda výběr chápeme jako uspořádaný nebo neuspořádaný.

b) budou nejvýše dva zmetky?

Jev B_i – ve výběru je právě i zmetků, $i = 0, 1, 2$.

Jevy jsou neslučitelné, tj. $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B_0) + \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)$

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Výběr je uspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{v(90,10)}{v(100,10)} = \dfrac{90!}{80!}\dfrac{90!}{100!}$

Nezáleží na tom, zda výběr chápeme jako uspořádaný nebo neuspořádaný.

b) budou nejvýše dva zmetky?

Jev B_i – ve výběru je právě i zmetků, $i = 0, 1, 2$.

Jevy jsou neslučitelné, tj. $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B_0) + \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)$

$B_0 = A$, $\mathsf{P}(B_1) = \dfrac{c(10,1)c(90,9)}{c(100,10)} \doteq 0{,}4080$,

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Výběr je uspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{v(90,10)}{v(100,10)} = \dfrac{90!}{80!}\dfrac{90!}{100!}$

Nezáleží na tom, zda výběr chápeme jako uspořádaný nebo neuspořádaný.

b) budou nejvýše dva zmetky?

Jev B_i – ve výběru je právě i zmetků, $i = 0, 1, 2$.

Jevy jsou neslučitelné, tj. $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B_0) + \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)$

$B_0 = A$, $\mathsf{P}(B_1) = \dfrac{c(10,1)c(90,9)}{c(100,10)} \doteq 0{,}4080$, $\mathsf{P}(B_2) = \dfrac{c(10,2)c(90,8)}{c(100,10)} \doteq 0{,}2015$

Příklady

V sérii 100 výrobků je 10 zmetků. Náhodně vybereme 10 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
a) nebude žádný zmetek?

Výběr je neuspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{c(90,10)}{c(100,10)} = \dfrac{90!}{10!80!}\dfrac{10!90!}{100!} = \dfrac{90!90!}{80!100!} \doteq 0{,}3305$

Výběr je uspořádaný: $\mathsf{P}(A) = \dfrac{v(90,10)}{v(100,10)} = \dfrac{90!}{80!}\dfrac{90!}{100!}$

Nezáleží na tom, zda výběr chápeme jako uspořádaný nebo neuspořádaný.

b) budou nejvýše dva zmetky?

Jev B_i – ve výběru je právě i zmetků, $i = 0, 1, 2$.

Jevy jsou neslučitelné, tj. $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B_0) + \mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2) \doteq 0{,}94$

$B_0 = A$, $\mathsf{P}(B_1) = \dfrac{c(10,1)c(90,9)}{c(100,10)} \doteq 0{,}4080$, $\mathsf{P}(B_2) = \dfrac{c(10,2)c(90,8)}{c(100,10)} \doteq 0{,}2015$

Příklady

Na prázdnou šachovnici náhodně umístíme dvě věže různé barvy. Jaká je pravděpodobnost, že se vzájemně
a) ohrožují?

Příklady

Na prázdnou šachovnici náhodně umístíme dvě věže různé barvy. Jaká je pravděpodobnost, že se vzájemně
a) ohrožují?

$$\mathsf{P}(A) = \frac{c(8^2,1)c(7+7,1)\frac{1}{2}}{c(8^2,2)} = \frac{64 \cdot 14\frac{1}{2}}{\frac{64\cdot 63}{2}} = \frac{2}{9} \doteq 0{,}222$$

Příklady

Na prázdnou šachovnici náhodně umístíme dvě věže různé barvy. Jaká je pravděpodobnost, že se vzájemně
a) ohrožují?

$$\mathsf{P}(A) = \frac{c(8^2,1)c(7+7,1)\frac{1}{2}}{c(8^2,2)} = \frac{64 \cdot 14\frac{1}{2}}{\frac{64\cdot 63}{2}} = \frac{2}{9} \doteq 0{,}222$$

b) neohrožují?

$$\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \doteq 0{,}778$$

Příklady

Úlohy rytíře de Mère

1. Házíme n kostkami. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň na jedné kostce bude šestka, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Příklady

Úlohy rytíře de Mère

1. Házíme n kostkami. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň na jedné kostce bude šestka, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev A – ⚅ padne: $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = \dfrac{V(5,n)}{V(6,n)} = \dfrac{5^n}{6^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

Příklady

Úlohy rytíře de Mère

1. Házíme n kostkami. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň na jedné kostce bude šestka, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev A – ⚅ padne: $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = \dfrac{V(5,n)}{V(6,n)} = \dfrac{5^n}{6^n} \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$$\begin{aligned} 1 - \left(\tfrac{5}{6}\right)^n &\geq \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} &\geq \left(\tfrac{5}{6}\right)^n \\ \log\tfrac{1}{2} &\geq n\log\tfrac{5}{6} \\ n &\geq \frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{5}{6}} \doteq 3{,}8 \end{aligned}$$

Příklady

Úlohy rytíře de Mère

1. Házíme n kostkami. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň na jedné kostce bude šestka, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev A – ⚅ padne: $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = \dfrac{V(5,n)}{V(6,n)} = \dfrac{5^n}{6^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$, $n \geq 4$

Příklady

Úlohy rytíře de Mère

1. Házíme n kostkami. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň na jedné kostce bude šestka, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev A – ⚅ padne: $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = \dfrac{V(5,n)}{V(6,n)} = \dfrac{5^n}{6^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$, $n \geq 4$

2. Házíme n-krát dvojicí kostek. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň jednou padne součet ok rovný dvanácti, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Příklady

Úlohy rytíře de Mère

1. Házíme n kostkami. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň na jedné kostce bude šestka, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev A – ⚅ padne: $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = \dfrac{V(5,n)}{V(6,n)} = \dfrac{5^n}{6^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$, $n \geq 4$

2. Házíme n-krát dvojicí kostek. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň jednou padne součet ok rovný dvanácti, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev B – padne (⚅⚅):

$$\mathsf{P}(\Omega \setminus B) = \frac{V\big(V(6,2)-1,n\big)}{V\big(V(6,2),n\big)} = \frac{V(6^2-1,n)}{V(6^2,n)} = \frac{35^n}{36^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(B) = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^n$$

Příklady

Úlohy rytíře de Mère

1. Házíme n kostkami. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň na jedné kostce bude šestka, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev A – ⚅ padne: $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = \dfrac{V(5,n)}{V(6,n)} = \dfrac{5^n}{6^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$, $n \geq 4$

2. Házíme n-krát dvojicí kostek. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň jednou padne součet ok rovný dvanácti, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev B – padne (⚅⚅):

$$\mathsf{P}(\Omega \setminus B) = \frac{V\big(V(6,2)-1,n\big)}{V\big(V(6,2),n\big)} = \frac{V(6^2-1,n)}{V(6^2,n)} = \frac{35^n}{36^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(B) = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^n$$

$$\begin{aligned} 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^n &\geq \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} &\geq \left(\tfrac{35}{36}\right)^n \\ n \log \tfrac{36}{35} &\geq \log 2 \\ n &\geq \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} \doteq 24{,}6 \end{aligned}$$

Příklady

Úlohy rytíře de Mère

1. Házíme n kostkami. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň na jedné kostce bude šestka, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev A – ⚅ padne: $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) = \dfrac{V(5,n)}{V(6,n)} = \dfrac{5^n}{6^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$, $n \geq 4$

2. Házíme n-krát dvojicí kostek. Jaké musí být n, aby pravděpodobost, že aspoň jednou padne součet ok rovný dvanácti, byla aspoň $\frac{1}{2}$?

Jev B – padne (⚅⚅):

$$\mathsf{P}(\Omega \setminus B) = \frac{V\big(V(6,2)-1,n\big)}{V\big(V(6,2),n\big)} = \frac{V(6^2-1,n)}{V(6^2,n)} = \frac{35^n}{36^n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(B) = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^n,$$

$n \geq 25$

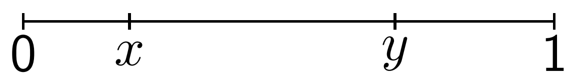
Příklady

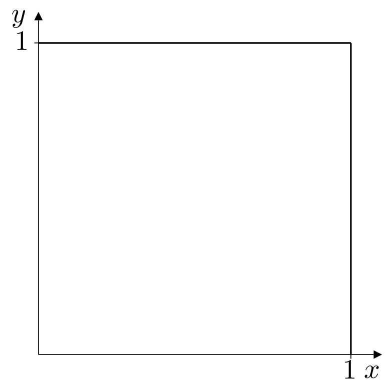
Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

Příklady

Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

Délku klobásy považujeme za jednotkovou. Umístíme ji na osu tak, že jeden její konec je v bodě 0, druhý v bodě 1. Souřadnici prvního řezu označíme x, druhého řezu y.



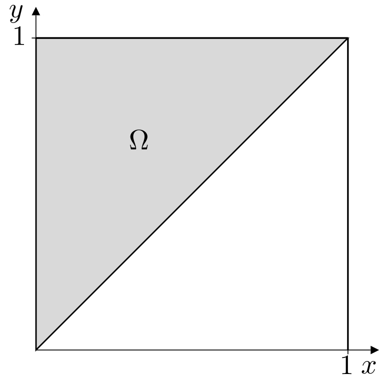


Příklady

Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

Délku klobásy považujeme za jednotkovou. Umístíme ji na osu tak, že jeden její konec je v bodě 0, druhý v bodě 1. Souřadnici prvního řezu označíme x, druhého řezu y.

1. $x < y$ („řez jedním nožem“)

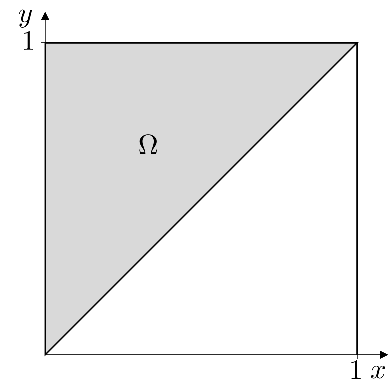


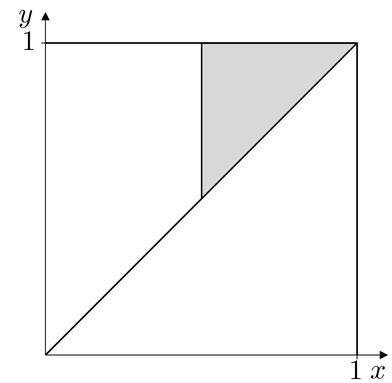
Příklady

Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

Délku klobásy považujeme za jednotkovou. Umístíme ji na osu tak, že jeden její konec je v bodě 0, druhý v bodě 1. Souřadnici prvního řezu označíme x, druhého řezu y.

1. $x < y$ („řez jedním nožem“)
   Má platit: $x > 1 - x$, tj. $x > \frac{1}{2}$,

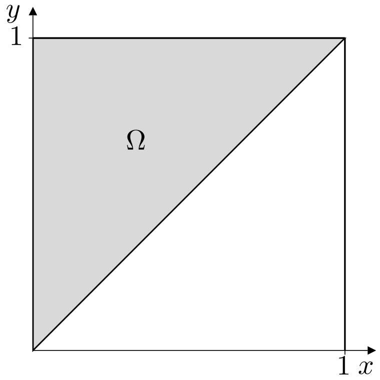


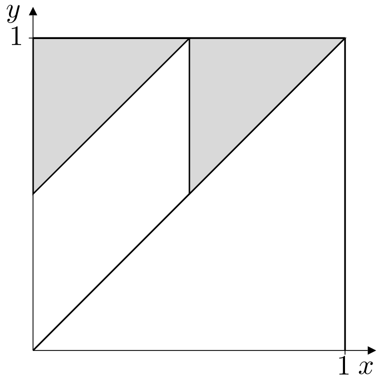


Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

Délku klobásy považujeme za jednotkovou. Umístíme ji na osu tak, že jeden její konec je v bodě 0, druhý v bodě 1. Souřadnici prvního řezu označíme x, druhého řezu y.

1. $x < y$ („řez jedním nožem“)
   Má platit: $x > 1 - x$, tj. $x > \frac{1}{2}$,
   nebo $y - x > x + (1 - y)$, tj. $y > x + \frac{1}{2}$,



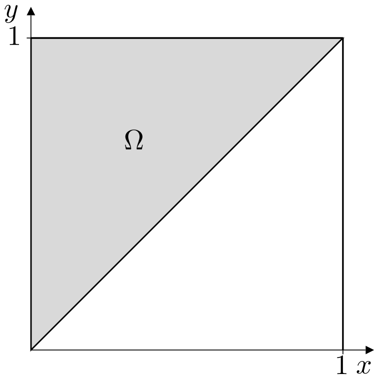


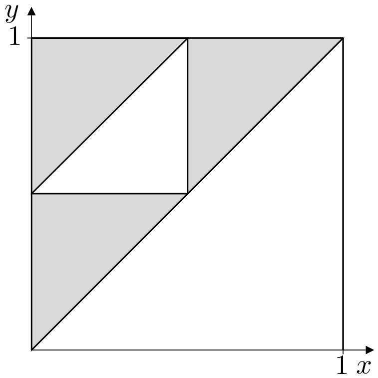
Příklady

Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

Délku klobásy považujeme za jednotkovou. Umístíme ji na osu tak, že jeden její konec je v bodě 0, druhý v bodě 1. Souřadnici prvního řezu označíme x, druhého řezu y.

1. $x < y$ („řez jedním nožem“)
   Má platit: $x > 1 - x$, tj. $x > \frac{1}{2}$,
   nebo $y - x > x + (1 - y)$, tj. $y > x + \frac{1}{2}$,
   nebo $1 - y > y$, tj. $y < \frac{1}{2}$.

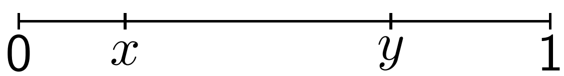




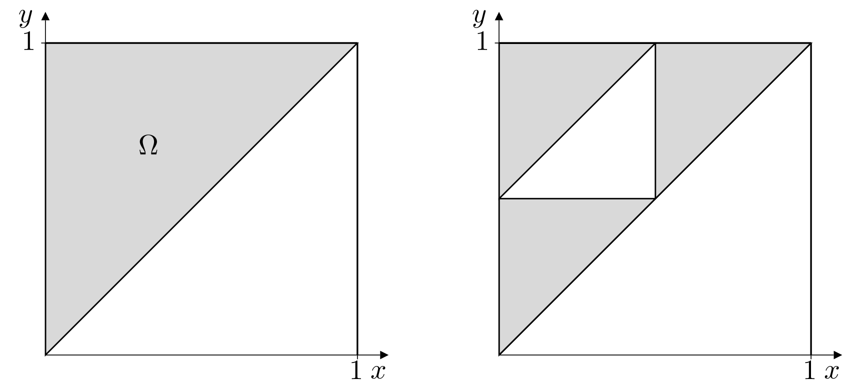
Příklady

Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

Délku klobásy považujeme za jednotkovou. Umístíme ji na osu tak, že jeden její konec je v bodě 0, druhý v bodě 1. Souřadnici prvního řezu označíme x, druhého řezu y.



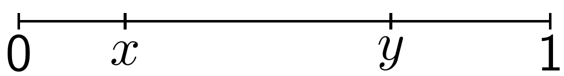
1. $x < y$ („řez jedním nožem“)
   Má platit: $x > 1 - x$, tj. $x > \frac{1}{2}$,
   nebo $y - x > x + (1 - y)$, tj. $y > x + \frac{1}{2}$,
   nebo $1 - y > y$, tj. $y < \frac{1}{2}$.
   $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{4}$



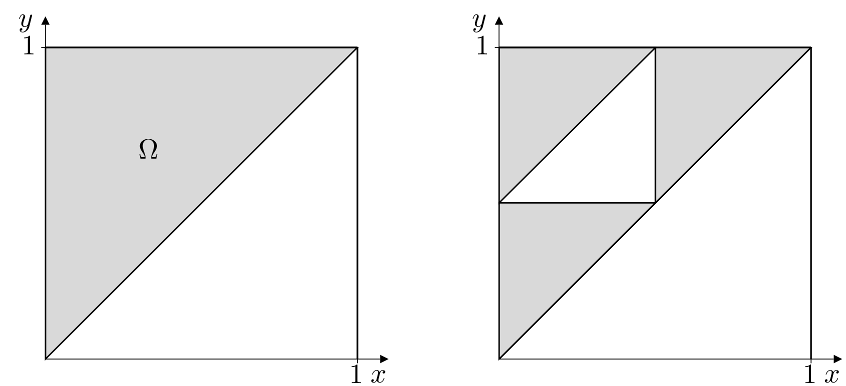
Příklady

Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

Délku klobásy považujeme za jednotkovou. Umístíme ji na osu tak, že jeden její konec je v bodě 0, druhý v bodě 1. Souřadnici prvního řezu označíme x, druhého řezu y.



1. $x < y$ („řez jedním nožem")
   Má platit: $x > 1 - x$, tj. $x > \frac{1}{2}$,
   nebo $y - x > x + (1 - y)$, tj. $y > x + \frac{1}{2}$,
   nebo $1 - y > y$, tj. $y < \frac{1}{2}$.
   $\mathsf{P}(A) = \frac{3}{4}$



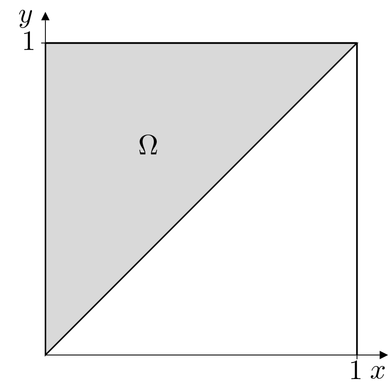
1. bez předpokladu $x < y$ („řez dvěma noži")

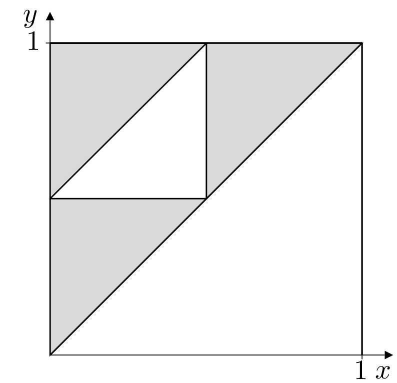
Příklady

Dvěma náhodně vedenými řezy rozdělíme klobásu na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že jedna z částí bude delší, než součet délek obou zbývajících částí?

Délku klobásy považujeme za jednotkovou. Umístíme ji na osu tak, že jeden její konec je v bodě 0, druhý v bodě 1. Souřadnici prvního řezu označíme x, druhého řezu y.

1. $x < y$ („řez jedním nožem“)
   Má platit: $x > 1 - x$, tj. $x > \frac{1}{2}$,
   nebo $y - x > x + (1 - y)$, tj. $y > x + \frac{1}{2}$,
   nebo $1 - y > y$, tj. $y < \frac{1}{2}$.
   $\mathsf{P}(A) = \frac{3}{4}$





1. bez předpokladu $x < y$ („řez dvěma noži“)
   $\mathsf{P}(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.