Cviceni 2: soustavy lineárních rovnic, Gaussova eliminace

Saturday, October 3, 2020 3:31 PM

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Soustav linearnic rovnic o n neznamych a m rovnic.

Cel: najit/popsat množinu všech řešení.

3 možnosti

1) $\nexists$ žadne řešeni

2) $\exists$ prave řešeni

3) $\exists$ ∞ řešeni

Určeme aktualni možnosti popisame

možnost, popisame množinu řešeni

Gausova eliminace

Matice soustavy $m \times n$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Tabulka m řadku, n sloupcu.

Rozšiřeni matice soustavy
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Cel: schodovy tvar

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
* & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\
0 & * & * & \cdots & \cdots & * & * \\
\vdots & 0 & * & * & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & *
\end{array}\right)$$

* klíčový prvek ≠ 0

* , * - cokoliv

když ∃ * ≠ 0 ⇒ není řešení

když ∀ * = 0 ⇒ řešení ∃

když # * = n ⇒ ∃ právě 1 řešení

když # < n ⇒ ∃ ∞ řešení

x_j odpovídá * - základný

Ostatní jsou volný, jsou volný (∀) parametry

* $x_j = L_j(c_1, \dots, c_k)$

$c_1, \dots, c_k$ ~ volný prom.

Používame elementárny úpravy

I typ: $r_j \to r_j + c \cdot r_k,\ c \in R$

II typ: $r_j \to c \cdot r_j$

(mix: $r_j \to c r_j + d r_k$)

III: $r_i \to r_j,\ r_j \to r_i$ (vzájemná výmena)

Algoritm Gausa

1) $\begin{cases} 3x+2y-5z=-1 \\ 2x-y+3z=13 \\ x+2y-z=9 \end{cases} \longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{cases} x+2y-z=9 \\ y-z=1 \\ z=4 \end{cases}$$

z=4 => y=5 => x=3

2) $$\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3-x_4=8 \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=7 \\ 5x_1-3x_2+x_3-8x_4=1 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -2 & 4 & 18 & 28 \\ 0 & -3 & 6 & 27 & 36 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 9 & 14 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 9 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \varnothing$$

3) $$\begin{cases} -2x_1-x_2+x_3+2x_4=-1 \\ x_1+2x_2-3x_3+x_4=4 \\ 3x_1+x_2-2x_3-2x_4=2 \\ 2x_1+2x_2-4x_3+x_4=5 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & 7 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -10 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -10 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -5 \end{array}\right) = (A|b)$$

$\Rightarrow X_1, X_2, X_3$ - zakladny;
X_4 - volna $\Rightarrow X_4 = C$
$(C \in \mathbb{R}) \Rightarrow$

$(c \in R)$, $\Rightarrow 4x_3 - 5c = -5$,

$x_3 = \frac{5}{4}c - \frac{5}{4}$, $\Rightarrow$ (param popis řešení)

$x_2 = \frac{3}{4}c + \frac{1}{4}$, $\Rightarrow$

$x_1 = \frac{5}{4}c - \frac{1}{4}$.

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ x_1, x_2 - základny

x_3, x_4 - volny

$x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$

$x_2 = 10c_1 - 17c_2 - 2$

$x_1 = -17c_1 + 29c_2 + 5$

$x_1 = -1 + c_1 + 2 - 3c_2 + 3$

5) $\begin{cases} kx_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_2 + kx_3 = 5 \end{cases} \rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ k & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & k & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 + k \cdot r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2+k & 1+2k & 8+7k \\ 0 & 1 & k & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & k & 5 \\ 0 & 2+k & 1+2k & 8+7k \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - (2+k) \cdot r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & k & 5 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & 2k-2 \end{array}\right)$$

I: $k \neq \pm 1 \Rightarrow \exists!$ řešení

$x_3 = -\dfrac{2}{k+1}$, $x_2 = \dfrac{7k+5}{k+1}$,

$x_1 = -\dfrac{6}{k+1}$

II: $k = -1 \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \nexists \text{ řeš.}$$

$\underline{III}$: $k=1 \Longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_{1,2}$ - zakl.

x_3 - volna

$x_3 = c,\ x_2 = 5 - c,\ x_1 = c - 2$