2. cvičení z M1110, podzim 2020

Příklad. 1. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & -2 \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 1 \\
x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 0
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Jsou-li nul. řádku nemá soustava řešení.

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 4$$

nemá řešení

Příklad. 2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0\\
2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0\\
2x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & -1\\
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 1
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0\\
2 & 1 & 2 & -2 & 2 & 0\\
2 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1\\
1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1
\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0\\
0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -4 & -1 & 1 & 0 & -1\\
0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Soustava má řešení

$\boxed{x_4 = s}$ $\boxed{x_5 = t}$ $s, t \in \mathbb{R}$
parametry

$$x_3 - x_4 = 1$$
$$x_3 = 1 + x_4 = s \qquad \boxed{x_3 = 1+s}$$
$$x_2 = 0 \qquad \boxed{x_2 = 0}$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$$
$$x_1 = -2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -1 - s + s - t$$
$$\boxed{x_1 = -1-t}$$

Všechna řešení soustavy jsou

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-1-t, 0, 1+s, s, t) \qquad s,t \in \mathbb{R}$$

$s = 2, \ t = 3 \qquad (-4, 0, 3, 2, 3)$

Příklad. 3. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & -6 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right)$$

3. řádek - 1. řádek

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & 9 \\ 0 & -3 & 4 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & +1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$x_4 = -\frac{4}{3}$$

$$-x_3 - 2x_4 = +1$$

$$1 - 2x_4 = x_3$$

$$x_3 = -1 - 2x_4 = -1 - 2\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

$$-3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 9$$

$$3x_2 = -9 + 5x_3 - 5x_4 =$$

$$= -9 + \frac{25}{3} + \frac{20}{3} = -9 + 15 = 6$$

$$x_2 = 2$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4$$

$$x_1 = -4 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 =$$

$$= \dots\dots$$

$$= \dots\dots$$

$$= 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = \frac{5}{3} \quad x_4 = -\frac{4}{3}$$

Jediné řešení.

Příklad. 4. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2x_1 & - & 3x_2 & + & 17x_3 & - & 29x_4 & - & 36x_5 & = & 22\\
2x_1 & - & 3x_2 & + & 18x_3 & - & 27x_4 & + & 33x_5 & = & 21\\
12x_1 & - & 18x_3 & + & 102x_3 & - & 174x_4 & - & 216x_5 & = & 132\\
2x_1 & - & 3x_2 & + & 21x_3 & - & 24x_4 & - & 30x_5 & = & 20\\
2x_1 & - & 3x_2 & + & 24x_3 & - & 21x_4 & - & 27x_5 & = & 19
\end{array}$$

Zkuste spočítat samostatně.

Rada pro volbu parametrů

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 11 \end{array}\right)$$

$$3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 11$$

$$x_3 = 3p \qquad x_4 = 3q$$

$$3x_2 = 11 - 5x_3 - 4x_4 =$$

$$= 11 - 5\cdot 3p - 4\cdot 3q$$

$$x_2 = \frac{11}{3} - 5p - 4q$$

Příklad. 5. Řešte soustavu rovnic pro neznámé $x,\ y,\ z$ v závislosti na hodnotách parametru $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ ax & + & y & + & z & = & a^2 \end{array}$$

Neznámé x, y, z, $a \in \mathbb{R}$ parametr v koeficientech

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-a \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 \overset{?}{} & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & a^2-a+a-1 = a^2-1 = (a-1)(a+1) \end{array}\right)$$

$$1-a^2+1-a = 2-a-a^2 = (1-a)(a+2)$$

$a \neq 1$ máme schod. tvar

Nechť $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$y = p \quad z = q \qquad x+y+z=1$

$x = 1-p-q$

řešení $(x,y,z) = (1-p-q, p, q)$

$p, q \in \mathbb{R}$

Pro $a = 1$ nek. mnoho řešení.

$a \neq 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & (a-1)(a+1) \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & (a-1)(a+1) \end{array}\right)$$

$a=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)\cdot(-1)=3 \end{array}\right)$$

$\neq 0$

Pro $a=-2$ nemá soustava řešení!

$a \neq 1 \wedge a \neq -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{(1-a)}(a+2) & \underline{(a-1)}(a+1) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & -a-1 \end{array}\right)$$

$a+2 \neq 0$

Jediné řešení

$$z = -\frac{a+1}{a+2}$$

$$y - z = 1$$

$$y = 1 + z = 1 - \frac{a+1}{a+2} = \frac{1}{a+2}$$

$$x + y + az = 1$$

$$x = 1 - y - az = 1 - \frac{1}{a+2} + \frac{a(a+1)}{a+2}$$

$$= \frac{a+2-1+a^2+a}{a+2} = \frac{a^2+2a+1}{a+2} = \frac{(a+1)^2}{a+2}$$

Jediné řešení $(x, y, z) = \left(\frac{(a+1)^2}{a+2}, \frac{1}{a+2}, -\frac{a+1}{a+2}\right)$

a není parametr řešení

je to parametr pro koeficienty

Příklad. 6. Najděte všechny dvojice parametrů $a, b \in \mathbb{R}$, pro které je množina řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & 2z & = & 1 \\ ax & + & y & + & 3z & = & b \end{array}$$

o neznámých $x, y, z \in \mathbb{R}$

(a) prázdná,
(b) nekonečná.

V druhém případě soustavu vyřešte.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 2-a & 0 \\ 0 & 1-a & 3-a^2 & b-a \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 3-a^2+2-a & b-a \\ & & 5-a^2-a & \end{array}\right)$$

$$a^2+a-5=0 \qquad a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+20}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$a=1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & b-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)$$

$b \neq 1$ soustava nemá řešení

$$\boxed{a=1,\ b\neq 1 \qquad \text{žádné řešení}}$$

$a=1,\ b=1$

nek. mnoho řešení

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$z=0$
$y=p$
$x=1-p$

$a \neq 1$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 5-a^2-a & b-a \end{array}$$

$$5-a^2-a = 0$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & b - \left(\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}\right) \end{array}$$

$$a = b = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení závisí na jednom parametru

$$\boxed{z = p}$$

$$(a-1)\,y = (a-2)\,z = (a-2)\,p$$

$$\boxed{y = \frac{a-2}{a-1}\,p}$$

$$x = 1 - ap - \frac{a-2}{a-1}\,p \; \ldots\ldots$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \qquad b \neq a$$

Poslední řádek

$$0 \quad 0 \quad 0 \;\Big|\; b-a \neq 0$$

$a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$ $\quad b \neq a \quad$ nemá řešení

$$a \neq 1, \quad a \neq \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Schod. tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \end{array}\right)$$

Soustava má jediné řešení.