Cviceni 6: linearna zavislost a baze

Monday, November 9, 2020 8:26 AM

Def: $\{a_1, \dots, a_n\} \subset V$

$a_1, \dots, a_n$ - lin. nezavisle,

když $\nexists \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0$

(netriv. nejaky $\lambda_j \neq 0$).

Znamena $\{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0\}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

$a_1, \dots, a_n$ lin. zavisle,

když $\exists$ netriv. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0$$

1) $\{a\}$, $a = (0,0)$, $V = \mathbb{R}^2$

$1 \cdot a = 0 \Rightarrow$ lin. zav.

$\{b\}$, $b = (1,0)$; $\lambda \cdot b = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda, 0) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$

lin. nezav.

2) $a_1 = (1,1)$, $a_2 = (1,-1)$

$b_1 = (3,2)$, $b_2 = (-6,-4)$

$\{a_1, a_2\}$ - lin. nezav.

Dukaz: netriv. $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0$

nechť $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow a_1 = \lambda a_2$,

$\lambda = -\frac{\lambda_2}{\ldots}$; jasné, že $\#!$

$\lambda = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, jasné že $\nexists \lambda$.

Anal. $\lambda_2 \neq 0$.

$\{b_1, b_2\}$ - <u>lin. zav.</u>: $b_2 = -2b_1$

$\Rightarrow$ <u>$2b_1 + b_2 = 0$</u>.

Důlež. poznámka: nechť

$V = \mathbb{R}^m$, $\{a_1, \dots, a_n\}$

Závislé-li?

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0$$

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

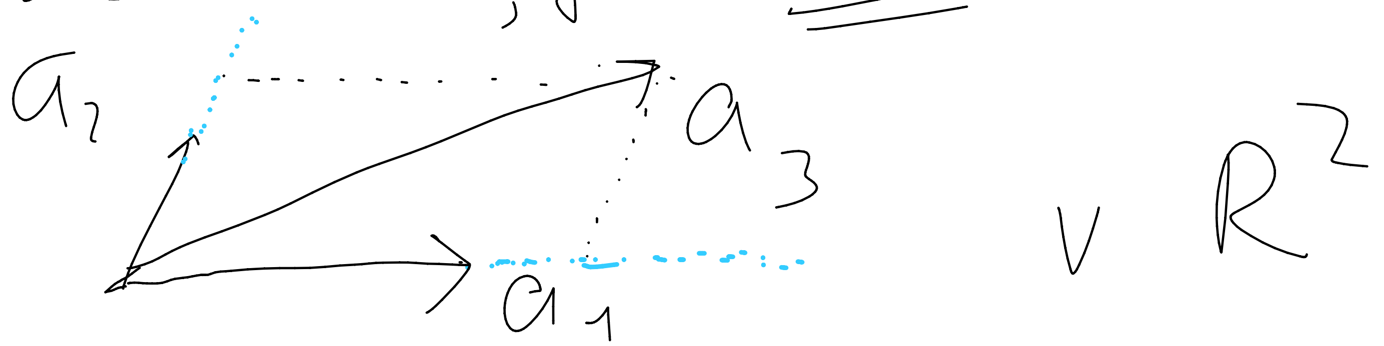
$\{ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0$

lin zavis. $\Leftrightarrow \exists$ řeš $\neq 0$

$\Leftrightarrow \exists$ volný prom. $\Leftrightarrow$

\# klíč. prom (schodů) $< n$

<u>Důsledek</u>: n vektorů v R^m, kde $n > m$, jsou <u>vždy</u> lin. zav.!



$\Rightarrow a_3 = \lambda a_1 + \mu a_2 \Rightarrow \lambda a_1 + \mu a_2 - a_3 = 0$

Ale pro $n \leq m$, potř. schod. tvar.

3) Jsou-li $a = (1, 2, 3)$,

$b = (-1, 1, 0)$, $c = (2, -3, 2)$

lin. zav?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

lin. nezav!

4) Jsou-li vektory

$a = (2, 5, 3)$, $b = (2, 4, 2)$,

$c = (-1, -6, -5)$ lin. zav.?

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -6 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ lin. zav.

Jak přesně určet tu lin. závislost?
Vyřešíme!

Nechť $X_3 = 1 \Rightarrow X_1 = 4,\ X_2 = -\frac{7}{2}$

$\Rightarrow 4a - \frac{7}{2}b + c = 0$

5) $V = \mathbb{R}_2[x]$,

$p_1 = x^2 + 3x + 5$
$p_2 = 7x^2 - x - 5$
$p_3 = -x^2 + 3x + 4$

jsou-li lin. záv?

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 = 0$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (x^0) \\ (x^1) \\ (x^2) \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & -10 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -12 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ lin. nezav.

6) $V = \{$funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}\}$

$f_1 = \sin^2 x$, $f_2 = \cos^2 x$

$f_3 = \sin 2x$, $f_4 = \cos 2x$

a) Jsou-li f_1, f_2, f_3 lin. zav.?

b) Jsou-li f_1, f_2, f_4 lin. zav.?

a) $\lambda_1 \sin^2 x + \lambda_2 \cos^2 x +$

$+ \lambda_3 \sin 2x = 0$

$+\lambda_3 \sin 2x = 0;$

$x = 0: \lambda_2 = 0$

$x = \frac{\pi}{2}: \lambda_1 = 0$ $\Rightarrow \lambda_3 \sin 2x = 0$

$\lambda_3 = 0.$

$\Rightarrow$ lin. nezav.

8) Ano: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\Rightarrow f_4 - f_2 + f_1 = 0$

7) $V = R^4$, $a_1 = (-1, -1, -1, -2)$,

$a_2 = (-3, -7, -11, -2)$

$a_3 = (-1, -2, -1, -1)$

$a_4 = (2, 1, 0, 5)$

$a_5 = (2,2,2,4)$

Najít minim. podmnožinu vektorů se stejným lin. obalem.

Zapíšme: $x_1 a_1 + \dots + x_5 a_5 = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -7 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & -11 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & -7 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & -11 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3, x_4, x_5 - \text{volný}$$

$\Rightarrow a_3, a_4, a_5 - \text{v lin. obalu}$

a_1 a $a_2 \Rightarrow [a_1, .., a_5] = [a_1, a_2]$

a_1, a_2 – lin. nezáv. $\Rightarrow$ nemůžeme dál zmenšit $\Rightarrow \boxed{\{a_1, a_2\}}$

<u>Def</u>: V – vekt. prostor;

Kolekce $\{a_\alpha\}_{\alpha \in E}$ je

Baze v V, když:

1) $\forall k$ prvku $\{a_1, \dots, a_k\} \subset \{a_\alpha\}$ jsou lin. nezav.

2) Lin. obal $\{a_\alpha\}$ je V.

$\left(\forall x \in V, \exists a_1, \dots, a_k \in \{a_\alpha\} : \right.$ = ∀ prvek může být představován v baze"

$\left. x = x_1 a_1 + \dots + x_k a_k \right)$

V je konečně-dimenzionální, když $\exists$ koneč. baze $\{e_1, \dots, e_n\}$

V tom případě, V je n-dimenzion prostor.

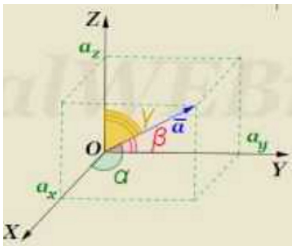
8) $V = \mathbb{R}^n$

8) $V = R^n$

$e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$

$\dots e_n = (0,0,\dots,0,1)$ — stand. baze

$x = (x_1,\dots,x_n) \Rightarrow x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$



$a = a_xe_1 + a_ye_2 + a_ze_3$

reprezentace v baze

n-dimenzionalni

9) $R[X]$ (vše polyn.)

$e_0 = 1$, $e_1 = x$, $e_2 = x^2$, $\dots$, $e_n = x^n$, $\dots$

$\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ nekonečne-dimen.!

10) $R_n[X]$

$e_0 = 1, e_1 = x, \dots, e_n = x^n$

$\{e_0, \dots, e_n\}$ - báze

$(n+1)$ - dimenz.

11) $V = \{$funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

∞ - dimenz.

$(V \supset \mathbb{R}[x])$

Fakt: $\exists$ báze, nespočetné

Hlavně budeme studovat konečně-dimenz. prostory

Ekvival. fakty:

(1) $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báze

(1) $\{e_1, .., e_n\}$ je báze

($e_1, .., e_n$ - lin. nezav., a taky $\forall x\ \exists x_1 \ldots x_n : x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$)

$x_1, .., x_n$ jsou souřadnice

x v bázi $\{e_1, \ , e_n\}$

(2) $\forall x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, a

$\exists!$ takový $x_1, .., x_n$.

(3) $\{e_1, .., e_n\}$ - lin. nezav.,

a nemůžime rozšířit do

větší $\{e_1, .., e_n, e_{n+1}, \ldots\}$ -

- taky lin. nezav.

(max lin. nezav. sbírka vektorů)

Takto: V, $\{e_1 \ldots e_n\} \Rightarrow$

V je podobný R^n!

Vlastnost: n je stejné $\forall$ báze

dimenze prostoru V

12) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \underbrace{a+d}_{\text{stopa matice}} = 0 \right\}$

Najít báze.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$: $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3$

E_1, E_2, E_3 – lin. nezáv.

$x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

13) Poznamka: V 7), když $W = [a_1, \ldots, a_5]$, tak fakticky jsme zjistili Baze $W = \{a_1, a_2\}$

14) V 7), doplnit' Baze W do Baze V.

Necht $e_1 = (1, 0, 0, 0)$,

$e_2=(0,1,0,0)$, $e_3=a_1$, $e_4=a_2$

$\Rightarrow \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ - baze:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

15) Uloha: zjistit baze $W \subset R^5$, W je dan soustavem lin. rovnic:

$$\begin{cases} -x_1-3x_2-x_3+2x_4+2x_5=0 \\ -x_1-7x_2-2x_3+x_4+2x_5=0 \\ -x_1-11x_2-3x_3+2x_5=0 \\ -2x_1-2x_2-x_3+5x_4+4x_5=0 \end{cases}$$

Vyřešeme ten soustav:

$$
\begin{pmatrix}-1 & -3 & -1 & 2 & 2\\ -1 & -7 & -2 & 1 & 2\\ -1 & -11 & -3 & 0 & 2\\ -2 & -2 & -1 & 5 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -2 & -2\\ -1 & -7 & -2 & 1 & 2\\ -1 & -11 & -3 & 0 & 2\\ -2 & -2 & -1 & 5 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -2 & -2\\ 0 & -4 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -8 & -2 & -2 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{(3)}
$$

$$
\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}
$$

$X_{1,2}$ - zakl. prom., $X_{3,4,5}$ - volny

$X_3 = c_1$, $X_4 = c_2$, $X_5 = c_3 \Rightarrow$

$X_2 = -\frac{1}{4}c_1 - \frac{1}{4}c_2$

$X_1 = -\frac{1}{4}c_1 + \frac{11}{4}c_2 + 2c_3 \Rightarrow$

$$
X = c_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4}\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}}_{e_1} + c_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{11}{4}\\ -\frac{1}{4}\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}}_{e_2} + c_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{e_3}
$$

Takto, $\forall X \in W$, $\exists c_1, c_2, c_3$:

$X = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$

$x = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$

Vzhledem na 3 posledních souřad. e_1, e_2, e_3 vidíme, že fakt $\{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0\}$ plyne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ e_1, e_2, e_3 - lin. nezáv.

$\Rightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$ - báze v W.