6. cvičení z M1110, podzim 2020

Příklad. 1. Zjistěte, zda jsou vektory $v_1 = (1, -1, 0, 2)$, $v_2 = (2, 2, -1, 3)$, $v_3 = (0, 1, 1, 0)$ a $v_4 = (3, 2, 0, 5)$ ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ lineárně závislé nebo nezávislé.

Musíme zjistit, zda rovnice

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

má pouze jediné řešení $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ } vektory jsou lin. nezávislé

nebo má i řešení

$(a_1, a_2, a_3, a_4) \neq (0,0,0,0)$ } jsou lin. závislé.

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 \phantom{{}+a_3} + 3a_4 &= 0 \\ -a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 &= 0 \\ -a_2 + a_3 &= 0 \\ 2a_1 + 3a_2 + 5a_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a_4 parametr $= p \neq 0$

a_3, a_2, a_1 dopočítáme

Existuje řešení $\neq (0,0,0,0)$

$\Rightarrow$ vektory jsou lin. závislé.

Příklad. 2. Zjistěte, zda jsou polynomy x^2+x+1, $2x^2+2$, x^2-x ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ lineárně závislé nebo nezávislé

$$a_1(x^2+x+1)+a_2(2x^2+2)+a_3(x^2-x)=0$$

$$x^2(a_1+2a_2+a_3)+x(a_1-a_3)+1(a_1+2a_2)=0\cdot x^2+0\cdot x+0\cdot 1$$

$$\begin{aligned} a_1+2a_2+a_3&=0\\ a_1\qquad -a_3&=0\\ a_1+2a_2\qquad&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1\qquad -a_3&=0\\ a_2+a_3&=0\\ -a_3&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&-1\\1&2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&2\\0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$a_1=0$
$a_2=0$
$a_3=0$

počet ved. koeficientů = počet neznámých

$\Rightarrow$ existuje jediné řešení $(0,0,0)$ při řešení, tak existuje pouze řešení $(0,0,0)$

Polynomy jsou lin. nezávislé.

Příklad. 3. Zjistěte, zda jsou následující funkce ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ lineárně závislé nebo nezávislé:

(1) $x^2, |x|, \sqrt{|x|}$,
(2) $(\sqrt{x^2}+1)^2, (\sqrt{x^2}-1)^2, x^2+1$,
(3) $\sin x, \cos x, \sin 2x$.

(1) $\quad a_1 x^2 + a_2 |x| + a_3 \sqrt{|x|} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{ll} x = 1 & a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ x = 2 & a_1 4 + a_2 2 + a_3 \sqrt{2} = 0 \\ x = 4 & a_1 \cdot 16 + a_2 4 + 2 a_3 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & \sqrt{2} \\ 16 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & \sqrt{2} \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & \sqrt{2}-4 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & \sqrt{2}-4 \\ 0 & 0 & \underbrace{-7-3\sqrt{2}+12}_{5-3\sqrt{2} \neq 0} \end{pmatrix}$$

Existuje jediné řešení
$a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

$\Rightarrow$ Funkce jsou lin. nezávislé.

(2) $(\sqrt{x^2}+1)^2, \quad (\sqrt{x^2}-1)^2, \quad x^2+1 \qquad \forall x$

$$a_1(\sqrt{x^2}+1)^2 + a_2(\sqrt{x^2}-1)^2 + a_3(x^2+1) = 0$$

$x=0$: $a_1 1 + a_2(+1) + a_3 \cdot 1 = 0$

$x=1$: $a_1 4 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 2 = 0$

$x=2$: $a_1 9 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 5 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_3 = 2p, \quad a_2 = -1 \cdot p, \quad a_1 = -a_2 - a_3$
$= p - 2p$
$a_1 = -p$

Máme řešení $(-p, -p, 2p)$
$x = 0, 1, 2$

Zkusíme, zda neplatí pro všechna x

$p = -1 \qquad (1, 1, -2)$

$$1 \cdot (\sqrt{x^2}+1)^2 + 1 \cdot (\sqrt{x^2}-1) - 2(x^2+1) = 0$$

$$\underbrace{(\sqrt{x^2}+1)^2 + (\sqrt{x^2}-1)^2} = 2(x^2+1)$$

$$x^2 + 2|x| + 1 + x^2 - 2|x| + 1 = 2x^2 + 2$$

skutečně se to rovná.

$\forall x$ platí

$$\overset{p}{1} \cdot (\sqrt{x^2}+1)^2 + \overset{p}{1} \cdot (\sqrt{x^2}-1)^2 \overset{-2p}{-} 2(x^2+1) = 0$$

Tedy funkce jsou lin. závislé.

(3) $x = 5$

$\sin x, \cos x, \sin 2x$

vyjde lin. nezávislost

$$a_1 \sin x + a_2 \cos x + a_3 \sin 2x = 0$$

$x_1 = 0$
$x_2 = \frac{\pi}{2}$
$x_3 = \frac{\pi}{4}$

soustava má řešení pro $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

! $\sin 2x = a \sin x + b \cos x$!

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ není lin. závislost

~~[illegible]~~

Příklad. 4. S použitím algoritmu z 5. přednášky vyberte z vektorů $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \in \mathbb{R}^4$ lineárně nezávislé se stejným lineárním obalem.

$u_1 = (1, 2, 3, -1),\ u_2 = (-1, 3, 2, 4),\ u_3 = (1, 1, 4, -6),\ u_4 = (3, 5, 10, -8),\ u_5 = (1, 1, 1, 1).$

$$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \quad \dots \quad \underbrace{u_{i_1}, u_{i_2} \dots u_{i_s}}_{\text{jsou LN}}$$

$$[u_{i_1}, \dots u_{i_s}] = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 10 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & -8 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -5 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow 3.ř - 2.4.řádek$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 11 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 56 & 56 & -32 \end{pmatrix}$$

$-2 + (-30$

→ další algoritm

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 11 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

1. 2. 3. 5.

$-32 + 28$

Vybereme u_1, u_2, u_3, u_5.

$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_5 u_5 = 0$

$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = 0.$

u_1, u_2, u_3, u_5 jsou LN

u_4 je lin. kombinací u_1, u_2, u_3,

$b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 = u_4$

$\left(u_1\ u_2\ u_3 \mid u_4 \right) \sim \dots \sim$

schod. tvar, má řešení

$$[u_1, u_2, u_3, u_5] = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]$$

$$\subseteq$$

$$\supseteq$$

Příklad. 5. Najděte bázi podprostoru $M \subseteq \mathbb{R}^5$ všech řešení homogenní soustavy rovnic.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

a doplňte ji do báze celého prostoru $\mathbb{R}^5$.

Soustavu upravíme:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 10 & -3 & -9 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 8 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 23 & -23 & 22 \end{pmatrix}$$

$7 + \cancel{3 \cdot 9}$ 15

$x_4 = a$ $\qquad$ $23x_3 = 23x_4 - 22x_5$

$x_5 = 23b$ $\qquad$ $x_3 = a - 22b$

$$\begin{aligned} x_2 &= 8x_3 - 7x_4 + 5x_5 \\ &= 8a - 176b - 7a + 115b \\ &= a - 61b \\ x_1 &= -2x_2 + 3x_3 - x_4 - 5x_5 \\ &= \underline{-2a} + 122b + \underline{3a} - 66b \underline{- \cancel{a}} - 115b \\ &= -59b \end{aligned}$$

$\{(-59b, a-61b, a-22b, a, 23b),\ a, b \in \mathbb{R}\}$

$= \{a(0,1,1,1,0) + b(-59,-61,-22,0,23),\ a, b \in \mathbb{R}\}$

$= [\underbrace{(0,1,1,1,0)}_{v_1}, \underbrace{(-59,-61,-22,0,23)}_{v_2}]$ = vekt. podprostor řešení

Báze?

v_2 není násobkem $v_1 \Rightarrow v_1, v_2$ jsou LN

Tvrdíš v_1, v_2 je báze podprostoru řešení!

Doplníte vektory v_1, v_2 na bázi celého $\mathbb{R}^5$

$$\mathbb{R}^5 = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5] \qquad e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad e_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^5 \supseteq [\overset{LN}{\underline{v_1, v_2}}, \underbrace{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5}_{= \mathbb{R}^5}] \supseteq [e_1 \ldots e_5] = \mathbb{R}^5$$

Chceme vybrat z $v_1, v_2, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ lin. nezávislé se stejným lin. obalem. Tím dostaneme požadovanou bázi

$$\begin{pmatrix} 0 & -59 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -61 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -22 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$\sim \ldots\ldots$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & e_1 & e_2 & & e_4 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \bullet & & & & & & \\ 0 & \bullet & & & & & \\ 0 & 0 & \bullet & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \end{array}$$

Doplnili jsme bázi v_1, v_2 podprostoru na bázi celého prostoru $\mathbb{R}^5$.

Příklad. 6. Napište dvě různé báze vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{3x3}(\mathbb{R})$ všech reálných matic tvaru 3×3. Dále najděte báze podprostorů:

(1) $U \subseteq \mathrm{Mat}_{3x3}(\mathbb{R})$ všech symetrických matic,
(2) $V \subseteq \mathrm{Mat}_{3x3}(\mathbb{R})$ všech antisymetrických matic,
(3) $W \subseteq \mathrm{Mat}_{3x3}(\mathbb{R})$ všech matic s nulovou stopou.

$\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$\nearrow$ báze

$$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

9 dim = 9

matic báze je 9

A

$$\begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ 0&1&0\\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ 0&0&1\\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 0&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$$

B_{ij} matice která má 1 na místě ij jinak samé 0.

$$\begin{pmatrix} 1&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$$

Sym. matice

$$\begin{pmatrix} a & b & c\\ b & d & e\\ c & e & f \end{pmatrix}$$

parametrů má 6

Báze podprostoru sym. matic

$a=1$ $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$ $b=1$ $\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}$ $c=1$ $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$ $f=1$

$W = \{ A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}),\ tr\, A = 0 \}$

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{11}-a_{22} \end{pmatrix}$$ 8 parametrů

Báze jeden 1, ostatní 0.

Příklad. 7. Najděte báze podprostorů prostoru $\mathbb{R}_3[x]$:

(1) $K = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : \ p(-x) = -p(x), \ p(1) = 0\}$,

(2) $L = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : \ p(x) - 2xp'(x) = 0\}$, kde p' značí derivace polynomu p.

K: $\quad p(-x) = -p(x) \qquad p(1) = 0$

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$p(-x) = -a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0 = -a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0$$

Porovnáním koeficientů

$$\begin{aligned} -a_3 &= -a_3 & & & 0 &= 0 \\ a_2 &= -a_2 & &\Rightarrow & a_2 &= 0 \\ -a_1 &= -a_1 & &\Rightarrow & 0 &= 0 \\ a_0 &= -a_0 & &\Rightarrow & a_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$p(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0$$

$$a_3 + a_1 = 0$$

$$a_1 = -s$$

$$a_3 = s$$

$$(s, 0, -s, 0) \quad \dots\dots \quad K = \{ sx^3 - sx \in \mathbb{R}_3[x], \ s \in \mathbb{R} \} = [x^3 - x]$$

Báze K je určena polynomem $x^3 - x$.

$$\dim K = 1$$

(2) $L = \{ p \in \mathbb{R}_3[x], \ p(x) - 2xp'(x) = 0 \}$

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1(x) + a_0$$

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 - 2x(3a_3x^2 + 2a_2x^1 + a_1) = 0$$

$$x^3(a_3 - 6a_3) + x^2(a_2 - 4a_2) + x(a_1 - 2a_1) + a_0 = 0$$

$$\begin{aligned} -5a_3 &= 0 \\ -3a_2 &= 0 \\ -a_1 &= 0 \\ a_0 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow L = \{\vec{o}\}$$

Báze L je prázdná.

Báze $\vec{o}$ nebo $\{\ \}$

Příklad. 8. Ukažte, že vektorový prostor U všech nekonečných posloupností reálných čísel nemá bázi tvořenou konečným seznamem vektorů. Dále ukažte, že jeho podprostor

$$F = \{(a_i)_{i=1}^{\infty} \in U : \; a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \; n \geq 2\}$$

má bázi tvořenou dvěma vektory.

U posloupnosti reálných čísel $(a_i)_{i=1}^{\infty}$

$F = \{(a_i), \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \; n \geq 2\}$

U není gen. konečným počtem posloupností

F má bázi tvořenou 2 vektory.

$a_i^{(1)}, \; a_i^{(2)}, \; \dots, \; a_i^{(n)}$

U nemá bázi tvořenou 2 posloupnostmi

$\alpha \quad a_i \qquad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots$

$\beta \quad b_i \qquad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \dots$

$\alpha a_1 + \beta b_1, \; \alpha a_2 + \beta b_2, \; \alpha a_3 + \beta b_3,$

$\exists \, x_i$ která tak nelze napsat

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$\alpha a_1 + \beta b_1 = x_1$

$\alpha a_2 + \beta b_2 = x_2$

spočítáme α, β

$\alpha a_3 + \beta b_3 \neq x_3$

Potom $(x_i) \neq \alpha (a_i) + \beta (b_i)$!

$F = \{(a_i) \mid a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \; n \geq 2\}$

má bázi o 2 posloupnostech

$(a_i) \in F$ je určena jednoznačně členy a_0, a_1

$a_2 = a_1 + a_0$

$a_3 = a_2 + a_1$

Báze F ví dáma posloupnosti

$c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$ $\in F$

$(c_i) = (\underline{1, 0}, \ldots\ldots\ldots) = (1, 0, 1, 1, 2, 3, \ldots$

$(d_i) = (\underline{0, 1}, \ldots\ldots\ldots) = (0, 1, 1, 2, 3, \ldots$

$d_{n+1} = d_n + d_{n-1}$

$(a_i) \in F$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

$(a_i) = (a_1, a_2, \ldots\ldots)$

$$\underline{(a_i)} = \underline{a_1 (c_i) + a_2 (d_i)} = (a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0, \; a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1, \ldots)$$

$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 = a_0$, $a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1 = a_1$

$\underbrace{(a_i)}_{\in F} + \underbrace{(b_i)}_{\in F} \in F$

$a \underbrace{(a_i)}_{\in F} \in F$

báze $(1, 0)$, $(0, 1)$

$$F \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(a_i)_{i=1}^{\infty} \longmapsto (a_1, a_2)$$

$$\longleftarrow$$

$$\longleftarrow\!\!| \; (a_1, a_2)$$

$a_1, a_2, a_3 = a_2 + a_1,$

$a_4 = a_3 + a_2$

$\vdots$

$1, 0, 1, 1, 2, 3, \ldots$

$0, 1, 1, 2, 3, \ldots$

Příklad. 9. Dokažte z definice báze: Je-li $u_1, u_2.u_3.u_4$ báze prostoru U, pak $u_1+u_4, u_3, u_2+u_3+u_4, u_1+2u_3$ je rovněž báze prostoru U.

(1) $[u_1, u_2, u_3, u_4] = [u_1+u_4, u_3, u_2+u_3+u_4, u_1+2u_3]$

(2) Je-li $u_1 \dots u_4$ LN, pak

$u_1+u_4, u_3, u_2+u_3+u_4, u_1+2u_3$ jsou LN.

Implikace $A \Rightarrow B$

Dokážeme $\neg B \Rightarrow \neg A$, nepřímý důkaz.

$u_1+u_4, u_3, u_2+u_3+u_4, u_1+2u_3$ jsou lin. závislé.

$\exists (a_1, a_2, a_3, a_4) \neq (0,0,0,0)$

$$a_1(u_1+u_4) + a_2 u_3 + a_3(u_2+u_3+u_4) + a_4(u_1+2u_3) = 0$$

$$u_1(a_1+a_4) + u_2(a_3) + u_3(a_2+a_3+2a_4) + u_4(a_1+a_3) = 0$$

$$\begin{aligned} a_1+a_4 &= 0 & &\Rightarrow \boxed{a_4 = 0} \\ \boxed{a_3} &\boxed{= 0} & &\boxed{a_2 = 0} \\ a_2+a_3+2a_4 &= 0 & & \\ a_1+a_3 &= 0 & &\Rightarrow \boxed{a_1 = 0} \end{aligned}$$

Kdyby koeficienty byly nulové, pak

$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$,

což je spor s naším předpokladem.

u_1, u_2, u_3, u_4 jsou LZ.

$[u_1, u_2, u_3, u_4] = [u_1+u_4, u_3, u_2+u_3+u_4, u_1+2u_3]$

$\subseteq$

$\supseteq$

$u_1+u_4,\ u_3,\ u_2+u_3+u_4,\ u_1+2u_3 \in [\underline{u_1,u_2,u_3,u_4}]$

$\supseteq$ dokázáno

Analogicky je zahrnuta dk, že
u_1, u_2, u_3, u_4 jsou lin. kombinace

$u_1+\cancel{u_4}$, $\underline{u_3}$, $u_{\cancel{2}}+u_3+\cancel{u_4}$, $\underline{u_1+2u_3}$

$\underline{u_3} = u_3$

$\underline{u_1} = (u_1+2u_3) - 2u_3$

$u_{\cancel{4}} = \underbrace{(u_1+u_4) - \underline{u_1}}_{\text{lin. kom.}}$

lin. kombinace

$u_2 = (u_2+u_3+u_4) - \underline{u_3} - \underline{u_4}$

víme, že jsou lin. kombinace
tedy i u_2 je lin. kombinace vektorů $u_1+u_4, u_3, u_2+u_3+u_4$
u_1+2u_3.