7. cvičení z M1110, podzim 2020

Příklad. 1. Spočtěte souřadnice polynomu $1 + 3x + 5x^2 + 10x^3$ v bázi

$$\alpha = (1 + x + 2x^2 - x^3, 1 + 2x + x^3, 1 + x + 3x^2 - x^3, 2 + 2x + 4x^2 + 5x^3)$$

prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

Řešení. $(-10, 2, 7, 1)$ □

$\mathbb{R}_3[x]$ vekt. prostor polynomů v proměnné x s koeficienty v $\mathbb{R}$ stupně ≤ 3.

$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ standardní báze $x^3, x^2, x, 1$

α tvoří bázi (vektory = polynomy jsou LN a generují $\mathbb{R}_3[x]$).

$\alpha = (p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x))$ $p(x) = 1 + 3x + 5x^2 + 10x^3$

$$p(x) = \underline{a_1} p_1(x) + \underline{a_2} p_2(x) + \underline{a_3} p_3(x) + \underline{a_4} p_4(x) \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

$$(p)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$1 + 3x + 5x^2 + 10x^3 = a_1(1 + x + 2x^2 - x^3) + a_2(1 + 2x + x^3) + a_3(1 + x + 3x^2 - x^3) + a_4(2 + 2x + 4x^2 + 5x^3)$$

Porovnáme koeficienty u $1, x, x^2, x^3$ na levé a pravé straně:

$$\begin{aligned}
1: &\quad 1 = a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 \\
x: &\quad 3 = a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 \\
x^2: &\quad 5 = 2a_1 + 3a_3 + 4a_4 \\
x^3: &\quad 10 = -a_1 + a_2 - a_3 + 5a_4
\end{aligned}$$

• $10 = 10 + 2 - 7 + 5$ ✓

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 5 & 10 \end{array}\right) \sim \text{schod. tvar} \quad \left(\quad \text{schod. tvar} \quad \right)$$

Přechod na schod. tvar si udělejte sami.

Řešení

$$a_4 = 1$$
$$a_3 = 7$$
$$a_2 = 2$$
$$a_1 = -10$$

Dobře udělat zkoušku.

Souřadnice polynomu $1+3x+5x^2+10x^3$ v bázi α jsou

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 2. Najděte báze a dimenze součtu a průniku podprostorů P a Q v $\mathbb{R}^4$, jestliže

$$P = [(4,0,-2,6),(2,1,-2,3),(3,1,-2,4)],$$
$$Q = [(1,-1,0,2),(2,2,-1,3),(0,1,1,0)].$$

Řešení. Průnik má dimenzi 2 a bázi např. $(1,-1,0,2),(-2,-1,2,-3)$. □

Součet podprostorů:

$$P = [u_1, u_2, u_3] = \{ a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 \in \mathbb{R}^4, \ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}$$
$$Q = [v_1, v_2, v_3] = \{ b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 \in \mathbb{R}^4, \ b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R} \}$$

$$P + Q = \{ u + v \in \mathbb{R}^4, \ u \in P, \ v \in Q \}$$
$$= \{ a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 \in \mathbb{R}^4, \ a_i, b_i \in \mathbb{R} \}$$
$$= [u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3] \subseteq \mathbb{R}^4 \qquad \dim \mathbb{R}^4 = 4$$
$$\dim P+Q \leq 4$$

Musíme z těchto vektorů vybrat lin. nezávislé se stejným lin. obalem.

$$\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & & 5. & \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tedy lin. nez. vektory se stejným lin. obalem jsou

u_1, u_2, u_3, v_2 Tedy

báze $P+Q$ je tvořena vektory u_1, u_2, u_3, v_2

$\dim_{\mathbb{R}}(P+Q) = 4$ $\qquad P+Q \subseteq \mathbb{R}^4 \quad \dim P+Q = 4 = \dim \mathbb{R}^4$

$$\Downarrow$$

$P+Q = \mathbb{R}^4 \qquad e_1, e_2, e_3, e_4$ patří $P+Q$

Kdyby poslední řádek ve schod. tvaru byl ze samých nul

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

tak LN nebyly se zbývajícími lin. další jsou u_1, u_2, u_3 a tedy

$$P+Q = [u_1, u_2, u_3] = P \quad \Rightarrow \quad Q \subseteq P$$

$$P+Q = P.$$

= průnik.

$$P \cap Q = \{ z \in \mathbb{R}^4 ;\ z = \underbrace{a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3}_{P} = \underbrace{b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3}_{Q} \}$$

Musíme řešit soustavu

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$$

Lze přepsat

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 - b_1v_1 - b_2v_2 - b_3v_3 = 0$$

(homogenní soustava)

$$a_1\begin{pmatrix}4\\0\\-2\\6\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\3\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}3\\1\\-2\\4\end{pmatrix} = b_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\3\end{pmatrix} + b_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Porovnáme jednotlivé složky:

$$4a_1 + 2a_2 + 3a_3 = b_1 + 2b_2 + 0\cdot b_3$$

$$\dots\dots$$

$$\dots\dots$$

$$\dots\dots$$

Matice

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

nebo

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 & \text{pravá strana} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 2 & 3 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 4 & -2 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Řešíme tuto soustavu → upravujeme na schod. tvar.

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \end{array} \quad \mathrm{I}$$

$$0 = 2b_2 + 2b_3 \qquad\qquad b_3 = p$$
$$b_2 = -p$$
$$b_1 = q$$

$$\begin{cases} a_3 = -b_1 + 4b_2 + 4b_3 = -b_1 = -q \\ a_2 \quad \text{nemusíme počítat} \\ a_1 \end{cases}$$

$P \cap Q = \{ z = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 \mid b_1, b_2, b_3$ je řešení soustavy$\}$

$$= \{ z = q v_1 - p v_2 + p v_3 \} =$$
$$= \{ q v_1 + p(v_3 - v_2) \} = [v_1, v_3 - v_2]$$

$$v_1 = (1,-1,0,2) \qquad v_3 - v_2 = (-2,-1,2,-3)$$

$P \cap Q = [v_1, v_3 - v_2]$ $\quad v_1, v_3 - v_2$ jsou lin. nezávislé, generují $P \cap Q$, proto tvoří bázi $P \cap Q$.

Kontrola přes dimenze

$$\underset{\shortparallel}{\dim P} + \dim Q = \dim(\underset{\shortparallel}{P+Q}) + \dim(\underset{\shortparallel}{P \cap Q})$$
$$3 + 3 = 4 + 2$$

v_1, v_2, v_3 jsou lin. nezávislé.

$P \cap Q = \{ z = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3$, kde b_1, b_2, b_3 je řešení$\}$
$= [v_1, v_3 - v_2]$

$P \cap Q = \{ z = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$, a_1, a_2, a_3 jsou řešení$\}$
$= [a u_1 - b u_2, c u_2 + d u_3]$

Příklad. 3. Najděte báze a dimenze součtu a průniku podprostorů K a L v $\mathbb{R}^4$, jestliže

$$K = [(1,2,0,3),(0,1,1,2),(2,0,1,1)],$$
$$L = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4;\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0\}.$$

Návod. Průnik najděte přímo, bez hledání báze podprostoru L. Součet najděte pomocí formulky pro dimenze. □

K je zadán jako lin. obal !

L je zadán jako množina řešení homogenní soustavy rovnic !

Začneme s průnikem (není třeba počítat generátory podmínek L):

$$K \cap L = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4, \ (x_1,x_2,x_3,x_4) = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3, \ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0\}$$

$$= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$$

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + 2a_3 \\ x_2 &= 2a_1 + a_2 \\ x_3 &= a_2 + a_3 \\ x_4 &= 3a_1 + 2a_2 + a_3 \end{aligned}$$

$$2(a_1 + 2a_3) + 3(2a_1 + a_2) - (a_2 + a_3) - 2(3a_1 + 2a_2 + a_3) = 0\}$$

$$\underline{2} \cdot a_1 - 2a_2 + 1 \cdot a_3 = 0$$

$$\begin{aligned} a_1 &= p \\ a_2 &= q \\ a_3 &= 2q - 2p \ \checkmark \end{aligned} \qquad 2p - 2q + 2q - 2p = 0$$

$$K \cap L = \{ a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \in \mathbb{R}^4 ,\ a_1, a_2, a_3 \text{ jsou řešení soustavy} \}$$

$$= \{ p u_1 + q u_2 + (2q - 2p) u_3 \in \mathbb{R}^4 \}$$

$$= \{ p(u_1 - 2u_3) + q(u_2 + 2u_3) \in \mathbb{R}^4 \}$$

$$= [u_1 - 2u_3 ,\ u_2 + 2u_3] = [(-3,2,-2,1), (4,1,3,4)]$$

lin. nez.

Báze $K \cap L$ je $u_1 - 2u_3$, $u_2 + 2u_3$.

$\dim K \cap L = 2$

$\dim K = 3$ ukázali, že u_1, u_2, u_3 jsou LN

$\dim L = 3$ $2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$

$$\dim K + \dim L = \dim (K+L) + \dim (K \cap L)$$

$$3 + 3 = 4 + 2$$

Když víme, že $K + L \subseteq \mathbb{R}^4$ $\dim K+L = \dim \mathbb{R}^4 = 4$

$\Longrightarrow K + L = \mathbb{R}^4$

nemusíme bázi $K+L$ počítat, protože nějakou bázi $\mathbb{R}^4$ známe, třeba e_1, e_2, e_3, e_4.

Kdyby $\dim K+L < 4$, tak musíme bázi $K+L$ počítat.

Museli bychom najít generátory prostoru L v_1, v_2, v_3

$$K + L = [u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3]$$

a z těchto vektorů bychom vybrali lin. nezávislé $\rightarrow$ to by byla báze $K+L$.

Příklad. 4. Najděte báze a dimenze podprostorů $\sim \mathbb{R}_4[x]$

$$P = \{f \in \mathbb{R}_4[x] \,|\, f(1) = 0,\ f(2) = 0\} \quad \text{a} \quad Q = \{g \in \mathbb{R}_4[x] \,|\, g(x) = g(-x)\}$$

a báze a dimenze jejich průniku a součtu.

Řešení. $\dim P = 3$, $\dim Q = 3$, $\dim P \cap Q = 1$, $\dim P + Q = 5$, tedy $P + Q = \mathbb{R}_4[x]$. □

Báze Q : $g(x) = b_4 x^4 + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$

$g(x) = g(-x)$ sudé polynomy

$b_4 x^4 + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = b_4 x^4 - b_3 x^3 + b_2 x^2 - b_1 x + b_0$

$b_4 = b_4$

$b_3 = -b_3$

$b_2 = b_2$ $\Rightarrow b_3 = b_1 = 0$

$b_1 = -b_1$

$b_0 = b_0$

$Q = [x^4, x^2, 1]$ $\dim Q = 3$

$P = \{(x-1)(x-2)(ax^2+bx+c),\ a, b, c \in \mathbb{R}\} =$

$= \{a(x-1)(x-2)x^2 + b(x-1)(x-2)x + c(x-1)(x-2)\cdot 1\}$

$= [(x-1)(x-2)x^2, (x-1)(x-2)x, (x-1)(x-2)\cdot 1]$

$\dim P = 3$

$P \cap Q = \{a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0 \,|$

$a_4 + a_2 + a_0 = 0$

$16a_4 + 4a_2 + a_0 = 0\}$

$$\begin{array}{ccc} a_0 & a_2 & a_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$a_4 = p$, $a_2 = -5p$, $a_0 = -a_2 - a_3$

$= 5p - p = 4p$

$$P \cap Q = \{ p x^4 - 5px^2 + 4p \,,\, p \in \mathbb{R} \}$$
$$= [\, x^4 - 5x^2 + 4 \,] = [\, (x^2-1)(x^2-4) \,]$$

vector bază

$$\dim P \cap Q = \underline{1}$$

$$\dim P + \dim Q = \dim (P+Q) + \dim (P \cap Q)$$
$$3 \quad + \quad 3 \quad = \quad 5 \quad + \quad 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \dim P+Q = 5 = \dim \mathbb{R}_4[X] \\ P+Q \subseteq \mathbb{R}_4[X] \end{array}\right\} \Rightarrow P+Q = \mathbb{R}_4[X]$$

Baze $P+Q$ și națională $1, X, X^2, X^3, X^4$.

Příklad. 5. Nechť $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ je báze prostoru U. Souřadnice vektoru $v \in U$ v této bázi jsou jsou

$$(v)_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Najděte souřadnice vektoru v v bázi $\beta = (u_3, u_2 + 2u_1, u_1 - u_2 + 2u_3)$.

$$(v)_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad v = 2u_1 + 3u_2 - 4u_3$$

$$\|$$

$$(v)_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad v = x_1 \cdot (u_3) + x_2 (u_2 + 2u_1) + x_3 (u_1 - u_2 + 2u_3)$$

Dostáváme rovnici

$$x_1 u_3 + x_2 (u_2 + 2u_1) + x_3 (u_1 - u_2 + 2u_3) = 2u_1 + 3u_2 - 4u_3$$

$$(2x_2 + x_3)\, u_1 + (x_2 - x_3)\, u_2 + (x_1 + 2x_3)\, u_3 = 2\underline{u_1} + 3\underline{u_2} - 4\underline{u_3}$$

Porovnání koef. u u_1, u_2, u_3 dostaneme 3 rovnice:

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 \quad + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

$$x_3 = -\frac{4}{3}$$

$$x_2 = 3 + x_3 = \frac{5}{3}$$

$$x_1 = -4 - 2x_3 = -4 + \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$(v)_\beta = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 5/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} \quad \checkmark.$$

Příklad. 6. Najděte báze a dimenze následujících vektorových prostorů:

(1) $U = \{A \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R});\ A$ je antisymetická matice$\}$ nad $\mathbb{R}$,
(2) $\mathbb{C}_2[x]$ jako vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$,
(3) $\mathbb{R}^M$ nad $\mathbb{R}$, kde M je konečná množina.

(1) $U = \{A \in Mat_{4\times4}(\mathbb{R});\ A = -A^T\}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & \cdot & \cdot \\ -a_{12} & -a_{22} & \cdot & \cdot \\ -a_{13} & -a_{23} & \cdot & \cdot \\ -a_{14} & -a_{24} & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = -a_{11} \quad a_{22} = -a_{22} \quad a_{33} = -a_{33} \quad a_{44} = -a_{44}$$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0$$

$$A \in U \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 & b_{34} \\ -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= b_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \text{atd.}$$

báze má 6 prvků $\boxed{\dim = 6}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & \\ & & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & -1 & & 0 \\ & & & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & & \\ & 0 & & \\ & & & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $\mathbb{C}_2[x] = \{ c_2 x^2 + c_1 x + c_0 \mid c_i \in \mathbb{C} \}$

vekt. prostor nad $\mathbb{C}$

s bází $x^2, x, 1$

ale také vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

s bází

$$c_j = a_j + i b_j \qquad a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{C}_2[x] = \left\{ \sum_{j=0}^{2} (a_j + i b_j) x^j \right\} = [\underbrace{x^2, ix^2, x, ix, 1, i}_{\text{báze } \mathbb{C}_2[x] \text{ nad } \mathbb{R}}]$$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_2[x] = 6$.

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_2[x] = 3$.

(3) $\mathbb{R}^M$ = množina funkcí $f: M \to \mathbb{R}$

kde M je konečná.

$$\mathbb{R}^n \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

M má n prvků $1, 2, 3, \dots n$

$$f_1(i) = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ 0 & i \neq 1 \end{cases} \qquad f_2(i) = \begin{cases} 1 & i = 2 \\ 0 & i \neq 2 \end{cases}$$

$$\dots \quad f_n(i) = \begin{cases} 1 & i = n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$f_1, f_2, \dots, f_n$ je báze $\mathbb{R}^M$

$f : M \to \mathbb{R}$ libovolná funkce

Tvrdíme, že

$$f = \sum_{j=1}^{n} f(j)\, f_j$$

Důkaz $\forall i \in M$ je

$$f(i) = \sum f(j)\, f_j(i) = f(i) \underbrace{f_i(i)}_{=1} = f(i)$$

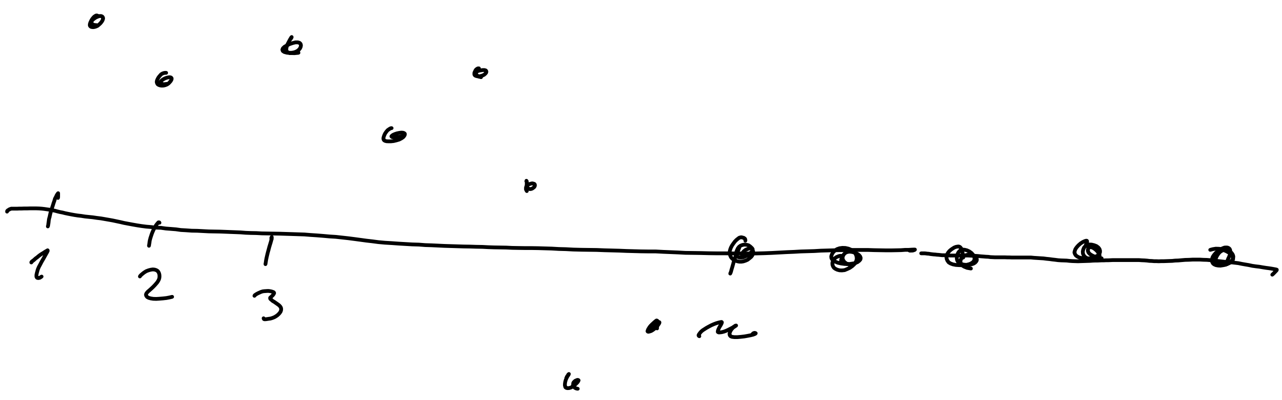
platí

Obdobně by se ukázalo, že $f_1, \dots f_n$ jsou lin. nezávislé.

$$\dim \mathbb{R}^M = n = \text{počet prvků } M$$

Příklad. 7.* (Vracíme se k příkladu 8 z předchozího cvičení.) Ukažte, že vektorový prostor $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ všech posloupností reálných čísel nemá nad $\mathbb{R}$ konečnou dimenzi. Zjistěte prvně, jak je to s dimenzí vektorového podprostoru

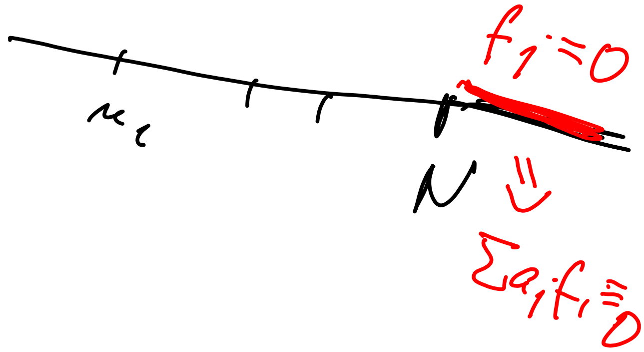
$$W = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N}\, \forall i \geq n : \ f(i) = 0\}.$$



W nemá kon. dimenzi

Kdyby W měla kon. dimenzi, tak by W ~~...~~ byla generována kon. počtem funkcí

$f_1, f_2, \dots f_r.$



$f_1 = 0$ pro $i \geq n_1$

$f_2 = 0$ pro $i \geq n_2$

$f_r = 0$ pro $i \geq n_r$

Vezměme $N = \max(n_1, n_2, \dots n_r)$

$f = \sum_{j=1}^{r} a_j f_j = 0$ pro všechna $i \geq N$

$f(i) = 0$ pro $i \geq N$

$f(i) = 1$ pro $i \in \{1, 2, \dots, N, N+1\}$

f nemůže být lin. kombinací funkcí $f_1 \dots f_r$

Dokazování pro s. šimi, že W je kon. generovaná!

$$\dim W = \infty$$

$\Rightarrow$ $W \subset \mathbb{R}^N$ podprostor

$\dim \mathbb{R}^N$ musí být ∞

$$\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} ; \exists r, \alpha : f(x) = r \sin(x+\alpha) \} = [\sin x, \sin(x+\tfrac{\pi}{2})]$$

Použijeme souč. vzorec pro sin

$$f(x) = \sin(x+\alpha) = \sin x \cos\alpha + \cos x \sin\alpha$$

$$= \cos\alpha \sin x + \sin\alpha \cos x$$

$$\cos x \overset{?}{=} \sin(x+\overset{?}{\alpha}) = \sin(x+\tfrac{\pi}{2})$$

$$r\sin(x+\alpha) = \underbrace{r\cos\alpha}_{a_1} \sin x + \underbrace{r\sin\alpha}_{a_2} \sin(x+\tfrac{\pi}{2})$$

Bá $\sin x, \cos x$ jsou lin. nezávislé!

Báze je $\sin x$, $\sin(x+\tfrac{\pi}{2})$.