Konzultace 10/11 2020

Vekt. prostor
specifikovat množinu U
operace $+ : U \times U \to U$ $\quad (u_1, u_2) \longmapsto \underset{u_1+u_2}{\overset{\parallel}{u}}$
$\cdot \quad \mathbb{K} \times U \to U$
vlastnosti (1) – (8)

Vekt. podprostor V $\qquad U$ je vekt. prostor
$V \subseteq U$ $\qquad v_1, v_2 \longmapsto v_1 + v_2 \in U$
chceme $v_1 + v_2 \in V$

a

__Příklad:__

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_1 - 3x_2 \qquad + 2x_4 = 0$$

V množina řešení, je to podprostor
$V = [\ ?\ ,\ ?\ ]$

$x_4 = b$
$x_3 = a$
$x_2 = 2a - 3b$
$x_1 = 4a + b$ $\qquad \in \mathbb{R}^4,\ a, b \in \mathbb{R}$

$$\{ \underbrace{(4a+b, 2a-3b, a, b)}_{\in \mathbb{R}^4,\ a,b \in \mathbb{R}} \} = \{ a(4,2,1,0) + b(1,-3,0,1) \}$$
$$= [(4,2,1,0), (1,-3,0,1)]$$

Příklad: $Q = \{ f \in \mathbb{R}_3[x],\ f(1) = f(3) \}$

$$f(x) = \underline{a_3} x^3 + \underline{a_2} x^2 + \underline{a_1} x + \underline{a_0} x$$
$$f(1) = f(3)$$

$$f(1) = a_3 1^3 + a_2 1^2 + a_1 1^1 + a_0 = a_3 3^3 + a_2 3^2 + a_1 3 + a_0 = f(3)$$
$$0 = 26 a_3 + 8 a_2 + 2 a_1 = 0$$

Neznámé a_0, a_1, a_2, a_3

Rovnice $\quad a_1 + 4a_2 + 13a_3 = 0$

Řešení:
$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = p$$
$$a_2 = q \qquad a_1 = -4a_2 - 13a_3 = -13p - 4q$$
$$a_0 = r$$

Obecně $p \in Q$, právě když

$$f(x) = p\,x^3 + q\,x^2 + (-13p - 4q)\,x + r$$
$$= p(x^3 - 13x) + q(x^2 - 4x) + r \cdot 1$$

$$f \in Q \iff f \in [x^3 - 13x,\ x^2 - 4x,\ 1]$$

$$Q = [\underbrace{x^3 - 13x,\ x^2 - 4x,\ 1}_{\text{lin. nezávislé}}]$$

$\mathbb{R}^4$ soustava rovnic $\qquad V$ množina řešení

$$V = [\ ?\ \ ?\ \ ..\ ?\ ]$$

v bázi $1, x, x^2, x^3$

$x^3 - 13x \qquad (0, -13, 0, 1)$

$x^2 - 4x \qquad (0, -4, 1, 0)$

$1 \qquad (1, 0, 0, 0)$

Odpověď je potřeba napsat v polynomech.

$$\mathbb{R}_3[x] = [1, x, x^2, x^3]$$

U má bázi $u_1, u_2, .. u_n \qquad U = [u_1, .. u_n]$

U nemá bázi (konečnou)

pak U nelze psát

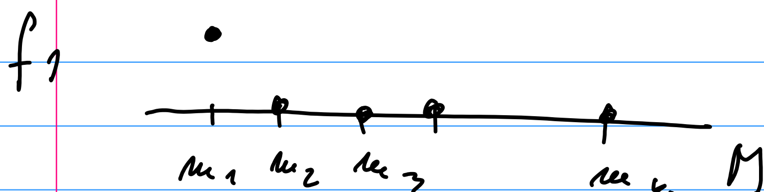
$$U \neq [u_1, \dots, u_k]$$

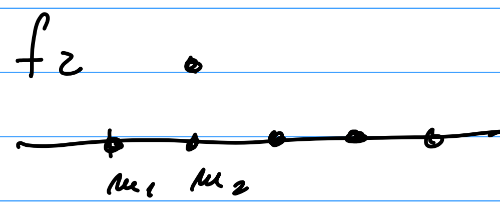
$\mathbb{R}^M$ M je konečná množina

$$M = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$$

$$\mathbb{R}^M = [f_1, f_2, \dots, f_k]$$

$$f_i(m_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$





$$f = \sum_{i=1}^{k} f(m_i) \cdot f_i$$

$$L = f(m_j) \qquad P = \sum_{i=1}^{k} f(m_i)\, \underbrace{f_i(m_j)}_{=0 \; i \neq j}$$

$$= f(m_j)\, \underbrace{f_j(m_j)}_{=1} = f(m_j)$$

$$\mathbb{R}^M \cong \mathbb{R}^k \qquad M = \{m_1, \dots, m_k\}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

M nekonečná $\mathbb{R}^M \neq [f_1, \dots, f_k]$

$$V = \{f \in ? \quad f(x) = f(-x)\} \qquad f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

f není lin. obal konečné množiny

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ není konečně dimenzionální

V není konečně dimenzionální

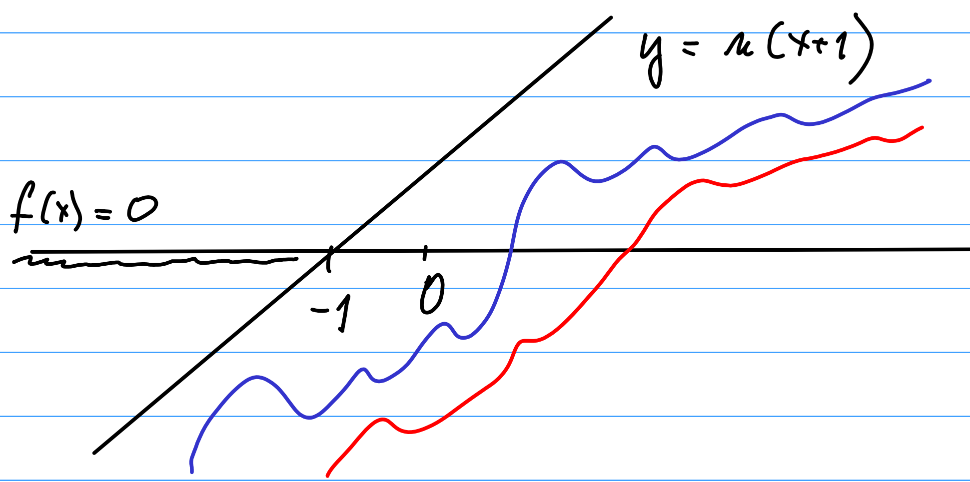
Kdy U je konečně dimenzionální
(= má konečnou dimenzi)
jestliže je generován konečnou množinou
vektorů $U = [u_1, u_2, .. u_k]$.

$V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$V = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq n x^2 \}$

jde o vekt. podprostor?

$W = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} ; \exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq n(x+1) \}$



$f(x) = 0 \;\; \forall x$ je nulová funkce. Leží ve W

$\exists ?\, n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq n(x+1)$ pro všechna x?

$f(x) \in W$, tedy W není $\qquad n = 1, 2, .$

W není vekt. podprostor.

(1) $f, g \in W$ $\quad f+g \overset{?}{\in} W$ $\quad$ platí,

(2) $a \in \mathbb{R}, f \in W$ $\quad a \cdot f \overset{?}{\in} W$ $\quad$ neplatí

$a = 0, f \in W$ $\quad 0 \overset{?}{\in} W$ $\quad$ není

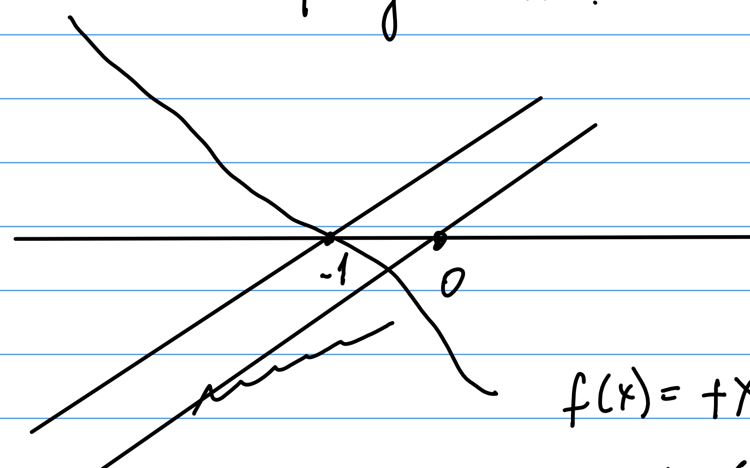
Platí podmínka (1)?

$f, g \in W$ $\quad \exists n \in \mathbb{N}$ $\quad f(x) \le n(x+1)$

$\exists k \in \mathbb{N}$ $\quad g(x) \le k(x+1)$

$$(f+g)(x) \le \underbrace{(n+k)}_{\in \mathbb{N}}(x+1)$$

$f+g \in W$.



$f(x) = +x$

$f(x) \le 1 \cdot (x+1)$

$(-1) f(x) = -x$

$-x > 0$ pro $x < 0$

$-x$ není $\le n(x+1)$ pro x zadané

---

12 úloh $\quad$ 60 bodů $\quad$ |||||| interaktivní osnova

4 úlohy $\quad 4 \cdot 8 = \underline{32}$ $\quad$ 60 b na 120

8 úloh $\quad 8 \cdot 5 = 40$ $\quad$ základní písemka

$\underline{72 \gg 60}$ $\quad$ na semestr

Splní 60 b

nebo náhr. písemky => může jít ke 2. části písemka

=> 3. části ústní zkouška

Organizační pokyny – hromadné dopisy